ELEMENTI
DI FISICA

Vol. II.

ELEMENTI
DI FISICA
GENERALE

DELL'ABATE

DOMENICO SCINÀ

P. PR. NELLA R. UNIVERSITÀ DI PALERMO

TOMO II.

MILANO

DALLA SOCIETÀ TIPOGR. DE' CLASSICI ITALIANI

MDCCCXXXIII

DELLA DINAMICA

PARTE SECONDA

Le forze di che abbiamo ragionato sono quelle che esercitano un' azione istantanea, e generando una velocità finita, producono un moto uniforme: noi abbiamo ricavato le leggi, a norma delle quali operano, dal fenomeno il più frequente e volgare dell' urto de' corpi. Spingendo ora più oltre le nostre ricerche, prenderemo ad esaminare un' altra maniera di forze: quelle cioè la cui azione è continua, che generano una velocità infinitamente piccola e producono un moto vario (T. I, num. 27). Ed è nostro intendimento di raccogliere le leggi secondo cui operano queste forze, che diconsi continue, dal fenomeno tanto comune e volgare della caduta dei corpi vicino alla superficie della terra, che trae sua origine dalla gravità (T. I, num. 33). Imperocchè sebbene da noi non si sappia se le azioni successive della gravità sien separate da intervalli di tempo la cui durata è insensibile; pure gli effetti che risultano dalla gravità, si convengono esattamente con quelli di una forza che opera senza interruzione, e tutti oggi son d' accordo a riguardarla come una forza costante. In questa guisa dai fenomeni della caduta de' corpi ritrarremo il modo con cui esercita la sua azione la gravità, e da questa forza, ch'è esistente in natura, ci sarà conceduto di conoscere e stabilire le leggi secondo cui operano le forze costanti. E come l' azione della gravità chiaro si ravvisa e più d'ogni altro si manifesta nella caduta verticale dei corpi, o in quella lungo i piani inclinati, o pure nel movimento dei penduli; così di tutti e tre questi articoli imprenderemo a parlare.

CAPO PRIMO

DELLA CADUTA VERTICALE DE' CORPI.

1. I gravi cadendo sulla superficie della terra incontrano la resistenza dell'aria che li ritarda, e turbati come sono da questa resistenza non ci dimostrano con precisione ed esattezza le leggi cui ubbidiscono nella loro caduta. Desaguliers lasciando cadere alcune palle di piombo dalla cupola della chiesa di S. Paolo di Londra, si accorse che l'aria alterava sensibilmente la loro discesa ritardandole di 53 piedi inglesi; e Galileo potè giungere a discoprire le leggi certe della caduta dei gravi per la penetrazione del suo ingegno, col favore della geometria e per mezzo della discesa dei corpi lungo un piano inclinato. A rendere quindi sensibili gli effetti della gravità nella caduta verticale dei corpi si è immaginata da Atwood una macchina, in cui tolta per poco la resistenza dell'aria, chiaro si potessero osservare gli spazj che percorrono i gravi cadendo verticalmente.

2. La macchina di Atwood è rappresentata nella *fig.* 1, ed è sostenuta da una colonna di legno, la quale s'innalza verticalmente e poggia sopra un piede parimente di legno, in cui le viti *r*, *m*, *t*, *n* servono a mantenere la colonna e con essa tutta la macchina in una posizione perpendicolare. Sulla colonna è collocato un piano di tavola, sopra cui stansi quattro ruote di sfregamento *c*, *d*, ec., e sull'intersecazione di queste ruote posa l'asse della ruota *o b*, la quale è scanalata nella sua circonferenza. Si avvolge a questa scanalatura un filo sottilissimo di seta, alle cui estremità sono appese per mezzo di uncini due scatole cilindriche di rame *A* e *B*, le quali si aprono e contener possono dei pesi. Il filo, cui è appesa *A*, scorre lungo una scala distinta in pollici e decimi di pollice; e questa, ch'è fissa sul piede e nella sommità della macchina, è così tenuta che il filo scorre paralello ad una linea che ne divide in mezzo la lunghezza. *C* è un sostegno di rame che si porta giù su d'ogni altezza della scala, e si ferma colla vite *x*. Finalmente a canto della colonna è un orologio che batte e segna i minuti secondi, affinchè si noti il tempo che *A* impiega a percorrere gli spazj che si leggono sulla scala.

3. A comprendere il meccanismo di questa macchina è qui da ricordare che come due corpi pesanti, i quali si tengono per un filo che passa sopra una puleggia, lo tirano in senso contrario, in virtù delle forze che risultano dalla loro gravità, e sono proporzionali alle loro rispettive masse; così non si possono mettere in movimento che per la differenza di queste forze o delle loro masse. E perchè questi due corpi debbonsi muovere unitamente e nello stesso tempo; perciò ne segue che la massa totale da muoversi è eguale alla somma delle loro masse, e l'azione della gravità, che imprime ad essi il moto, è rappresentata dalla differenza delle loro masse. Essendo adunque l'azione della gravità diminuita nella ragione della differenza alla somma delle loro masse, è chiaro che gli effetti, o sia gli spazj che dovranno trascorrere in un dato tempo, sieno diminuiti nella stessa proporzione con cui è diminuita l'azione della gravità. E però in luogo di percorrere in 1″ molti piedi come dovrebbe succedere quando la gravità operasse tutta intera, trascorrono in 1″ pochi pollici. Di fatto nella macchina di Atwood A e B sono i due corpi pesanti che tirano il filo in senso contrario, si muovono unitamente, e nello stesso tempo in virtù della gravità non proporzionale alla somma, ma alla differenza delle loro masse; e gli spazj ch'essi percorrono in ogni 1″, si riducono a pollici che si leggono sulla scala. E come la loro caduta è per piccoli spazj, così la resistenza dell'aria ritarda o poco o niente il loro moto, e si considerano come se cadessero nel vôto.

È del pari da trascurarsi la resistenza che può nascere dall'attrito delle ruote; perciocchè gli effetti dello strofinio per cagione delle ruote di sfregamento (T. I, num. 296) sono da reputarsi come nulli, massime se le ruote son pulite e libere d'ogni umidità. Per altro la macchina è così congegnata, che ove A e B si tengono in equilibrio, basta grani 1,5 per metterli in movimento. Tanto è piccola la resistenza dello strofinio.

Tra le cose che non sono da recarsi in calcolo è pure da mettersi l'inerzia e il peso del filo cui stan legati A e B. Poichè si è osservato che quando A percorre scendendo uno spazio di 48 pollici, il tempo per cagione del peso del filo non si accresce più di 0,312 di 1″, e perciò A nella sua caduta ritarda di una quantità che

si può benissimo rigettare, molto più quando gli spazj da cui cade giungono a 20, 30, o a 40 pollici.

4. Quello di cui si tien conto, è l'inerzia della ruota sopra cui passa il filo, e quella delle quattro ruote di sfregamento, le quali sono eccitate al movimento dal peso *A* che cade, e resistono in virtù della loro inerzia a un sì fatto moto. La quantità dell' inerzia di tutte le ruote per via di esperimento è computata di 2 once e 1/4 peso *avoirdupoids* (T. I, num. 137), che si considera come un peso sparso, e aggiunto per tutta la circonferenza della ruota *o*, *b*. E come Atwood stabilì per *peso campione* 1/4 di oncia *avoirdupoids*, che denota colla lettera *m*; così è chiaro che l'inerzia delle ruote è valutata per 11*m*.

5. Si hanno in fine dei pesi rotondi di rame, come si vedono nella *fig.* 28, i quali si possono racchiudere dentro la scatole cilindriche *A* e *B*, e questi pesi servono ad accrescere la massa di *A* e di *B*, la quale è fissata a 1 oncia e 1/2 peso *avoirdupoids*, o sia a 6*m*. Poste le quali cose, siamo ora in istato di comprendere gli esperimenti che si riducono ad effetto colla macchina d'Atwood.

Esperimento I.

Racchiuso in *A* (*fig.* 1) il peso di 21*m*, e in *B* di 20*m*, mantenete il fondo di *A* al punto zero della scala, e fermate il sostegno *C* a tre poll. Indi nell'atto che l'indice dell' orologio passa da 1″ ad un altro, lasciate cadere *A*, e così osserverete che *A* andrà a toccare *C*, o sia percorrerà 3 pollici nel tempo di 1″

Ponete di nuovo il fondo di *A* a zero, e il sostegno *C* a 12poll., ed osserverete che in due battute del pendulo, o sia in 2″, *A* partendosi da zero andrà toccando *C*, e trascorrerà 12 poll.

Posto *A* a zero e *C* a 27poll. della scala, si vedrà che in 3″ scenderà sino 27 poll.

Ramsden aggiunse alla macchina di Atwood per maggiore comodità e facilità una molla che premendosi dà moto nello stesso tempo ad *A* e all'orologio; ma anche senza questo artifizio riesce cosa molto facile colla pratica di lasciar cadere *A* nel momento che il pendulo comincia a segnare un 1″.

6. La massa propria di $A=6m$ (num. 5), il peso aggiunto ad $A=21m$, dà il peso tutto di $A=27m$. La massa di $B=6m$, il peso aggiunto a $B=20m$, dà il peso tutto di $B=26m$. La massa totale adunque in movimento $=27m$ peso di $A+26m$ peso di $B+11m$ inerzia delle ruote (num. 4) o sia $=64m$; e la forza della gravità, ch' eccita il movimento nella massa totale, $=m$, o sia l' azione della gravità è $1/64$ di quella che si dovrebbe esercitare, se A e B non fossero in contrasto. Gli spazj descritti verticalmente dalla massa $=64m$ in virtù della forza $=m=1/64$ della gravità, sono in 1″ 3poll., in 2″ 12poll., in 3″ 27poll., o sia facendo 3poll. $=1$, gli spazj descritti nel primo 1″ sono come 1, nel secondo 1″ sono $12-3=9$, o come 3, nel terzo 1″ sono $27-12=15$, o come 5.

7. Gli spazj dunque trascorsi in virtù della gravità nei singoli tempi successivi ed eguali giusta l' esperimento sono in ragione dei numeri impari, cioè 1, 3, 5, ec., e gli spazj totali sono come i quadrati dei tempi impiegati a trascorrerli. Poichè in 1″ lo spazio corrispondente è 3poll., o sia $1=1^2$; in 2″ gli spazj corrispondenti sono 3poll. + 9poll. $=12$, o come $1+3=4=2^2$; in 3″ gli spazj sono 3poll. + 9poll. + 15poll., o come $1+3+5=9=3^2$. E però i tempi sono 1, 2, 3, e gli spazj 1^2, 2^2, 3^2, o sia gli spazj sono proporzionali ai quadrati dei tempi.

Esperimento II.

Sia $A=27\ 1/2\ m$, e $B=25\ 1/2\ m$, si osserverà che A scende, e trascorre nel primo 1″ 6poll., e in 2″ 24poll., o pure posto $A=26\ 3/4\ m$, e $B=26\ 1/4\ m$, si vedrà che A percorre 54poll. in 6″.

8. Nel primo e secondo caso la massa che si mette in movimento è $=64m$; perchè $27\ 1/2\ m+25\ 1/2\ m+11m$ inerzia delle ruote $=64m$; come pure $26\ 3/4\ m+26\ 1/4\ m+11m=64m$. Ma nel primo caso l' azione della gravità, ch' eccita il movimento, $=2m=2/64=1/32$, e nel secondo $=1/2\ m=1/128$ della gravità proporzionale alla massa $64m$. Gli spazj trascorsi in virtù dell' azione della gravità $=1/32$ nel primo 1″ sono 6poll., nel secondo 1″ 18poll., o sia come 1 e 3, ec.; e quei descritti in forza della gravità $=1/128$ sono nel primo 1″

1 1/2 poll., nel secondo 1″ 4 1/2 poll., nel terzo 1″ 7 1/2 poll., nel quarto 1″ 10 1/2 poll., nel quinto 1″ 13 1/2 poll., e nel sesto 1″ 16 1/2 poll., o sia sono come 1, 3, 5, 7, 9, 11, ec.

9. Confrontando insieme questi col primo esperimento, è chiaro che all'azione della gravità 1/128 corrisponde nel 1″ lo spazio 1 1/2 poll., all'azione della gravità 1/64 corrispondono 3poll., e finalmente 6poll. alla gravità come 1/32; e nel secondo 1″ alle tre azioni rispettive della gravità gli spazj corrispondenti sono 4 1/2 poll., 9poll., 18poll.. Ora siccome l'azione della gravità 1/32 è doppia di quella di 1/64, e questa di 1/128; così gli spazj rispettivamente trascorsi nel primo 1″ 6poll., 3poll., 1 1/2poll.; e nel secondo 1″ 18poll., 9poll., 3poll., ec., sono doppj gli uni degli altri, o sia gli spazj sono proporzionali all'azione della gravità. E però se la massa tutta $64m$ si mette dalla quiete in movimento colla gravità proporzionale alla sua massa, o sia a 64, gli spazj saranno nel primo 1″ 3poll. $\times$ 64, o 1 1/2poll. $\times$ 128, o 6poll. $\times$ 32, o sia 192poll. = 16 piedi inglesi. Oltre di che si viene in generale a confermare che gli spazj trascorsi in virtù dell'azione della gravità seguono la ragione de' numeri impari, e perciò che sono proporzionali ai quadrati dei tempi.

Esperimento III.

Posta una massa in movimento $= 32m$ coll'azione della gravità $= m$, e poi una massa $= 64m$ colla gravità $= 2m$, e finalmente una massa $= 128m$ colla gravità $= 4m$, si osserverà che A scendendo percorrerà in tutti tre casi spazj eguali nel medesimo tempo, cioè nel 1″ 6poll., nel secondo 1″ 18poll., ec.

10. Le masse in movimento crescono come 32, 64, 128; e l'azione della gravità cresce in corrispondenza come 1, 2, 4; e in tal caso gli spazj descritti nel medesimo tempo risultano eguali. Se dunque l'azione della gravità cresce o si diminuisce nella stessa proporzione della massa in movimento, gli spazj descritti dalla quiete nel medesimo tempo sono eguali. Ora la gravità (T. I, num. 19) in ciascun corpo è proporzionale alla massa; però tutti i corpi cadendo verticalmente debbono nel medesimo tempo percorrere gli stessi spazj, come per altro fu dimostrato coll'esperimento nel vôto (T. I, num. 18). Ed essendosi già posto (num. 9) che la massa $64m$ in

virtù della sua gravità assoluta percorre in 1″ 16 piedi inglesi, egli è chiaro che tutti i gravi in virtù della propria gravità debbono percorrere in 1″ lo stesso spazio di 16 piedi. Questo spazio fu determinato da Galileo, e poi con più esattezza per mezzo dei penduli fu ridotto a 193$^{poll.}$ inlgesi, che risultano un pollice più di 16 piedi, e corrispondono a 181$^{poll.}$ francesi. E siccome gli spazj che, movendosi i corpi dalla quiete, descrivono in virtù della gravità, crescono in ragione dei numeri impari; così i gravi nel primo 1″ percorrono 16$^{poll.}$ incirca, nel secondo 1″ $3 \times 16 = 48^{poll.}$, nel terzo 1″ $5 \times 16 = 80^{poll.}$

Esperimento IV.

Oltre ai pesi di figura circolare vi sono alcune verghe di rame eguali in peso a m, a $^1/_2\, m$, ec., come si veggono nella *fig.* 29. E parimente nella scala graduata della macchina d'Atwood si può apporre un anello D di rame a traverso cui può passare A, come osservasi nella *fig.* 1. Ora racchiuse dentro A e B $20m$ circolari per ciascheduno, e posta sopra A una sbarra $= m$, si metta l'anello a 3 pollici della scala, e il sostegno C a 9 poll. Ciò fatto, si lasci cadere A da zero, e si osserverà che A giunge nell'anello, abbandona la sbarra F e traversa D nel primo 1″, e che continuando a scendere va a toccare il sostegno C in un altro 1″.

Posto l'anello a 12 poll., e C a 36 poll. della scala, si vedrà che A lascia la sbarra F alla fine di 2″, e continuando a scendere senza la sbarra giunge in C nel tempo di altri 2″,

11. La massa in movimento $= 64m$, perchè $6m$ peso di $A, + 20m$ peso racchiuso in $A, + 6m$ peso di $B, + 20m$ peso racchiuso in $B, + 11m$ inerzia delle ruote, $+ m$ sbarra di rame sopra $A, = 64m$; l'azione poi della gravità $= m$, e lo spazio trascorso da A, in virtù della gravità $= m$, è 3 poll. Venendo meno l'azione della gravità col restare F sopra l'anello, A segue a scendere in virtù dell'inerzia a cagione della velocità impressa da m. Lo spazio che percorre A per l'impulso ricevuto è di 6 poll. nel medesimo tempo di 1″, o sia doppio dello spazio trascorso in virtù della gravità che fu di 3 poll. E similmente posto l'anello a 12 poll., in virtù della velo-

cità concepita da A per causa della gravità $= m$ in 2″, A potè descrivere nel medesimo tempo di 2″ uno spazio di 24 poll., ossia doppio di quello che avea descritto. E perchè a norma delle leggi d'inerzia (T. I, num. 32) il moto con cui scende A per la velocità impressa, o sia per l'impulso ricevuto, è uniforme; così può stabilirsi che un *grave cadendo dalla quiete acquista tale velocità ch'è capace a fargli percorrere con moto uniforme e nel medesimo tempo uno spazio doppio di quello che ha descritto nei primi istanti della sua caduta in virtù della gravità.*

12. Se in 1″ il grave trascorre 6 poll. con un moto uniforme, la sua velocità $= 6/1$ (T. I, num. 29) $= 6$. E se in 2″ il grave percorre con moto uguale 24 poll., la sua velocità $= 24/2 = 12$. Finalmente se in 3″ descrive 54 poll., la sua velocità $= 54/3 = 18$. E però in 1″ la velocità $= 6 \times 1$, in 2″ $= 6 \times 2$, in 3″ $= 6 \times 3$, ec.; ossia posto $6 = 1$, le velocità sono 1, 2, 3 nella stessa ragione dei tempi. *Le velocità adunque che acquistano i corpi cadendo in virtù della gravità sono proporzionali ai tempi.* Indi è che i corpi i quali cadono vicino alla superficie della terra acquistano una velocità espressa nel primo 1″ $=$ 32 piedi inglesi $\times 1$, in 2″ $=$ 32 piedi $\times 2$, in 3″ $=$ 32 piedi $\times 3$, ec.

13. Se le velocità sono come i tempi, e questi come le radici degli spazj (num. 6), è chiaro che le velocità debbono pure tenersi per proporzionali alle radici degli spazj. Posta di fatto in movimento una massa $= 64m$ dall'azione della gravità $= m$, lo spazio descritto nel primo 1″ $=$ 3 poll., e la velocità $=$ 6 poll., e lo spazio descritto nei primi 3″ $=$ 27 poll., e la velocità che ne risulta $=$ 18 poll. Ora corrispondendo le velocità di 6 e 18, o sia 1 e 3 agli spazj 3 e 27, o sia 1 e 9, non ci è dubbio che la velocità come 1 sia $\surd$ dello spazio come 1, e la velocità come 3 sia $\surd$ dello spazio come 9. *Le velocità adunque che genera in un dato tempo l'azione costante della gravità, sono come le radici degli spazj trascorsi nel medesimo tempo in virtù della stessa gravità.*

14. Comparando sì fatte leggi intorno alla caduta verticale dei corpi, pare che il fatto principale a cui tutti gli altri si attengono, e da cui tutti gli altri dipendono, sia quello che in virtù della gravità le velocità che si generano, sieno proporzionali ai tempi. Di fatto da tal

proporzionalità egli è in prima manifesto che la gravità sia una forza costante; perciocchè la velocità totale acquistata in fine di un tempo qualunque non potrebbe essere proporzionale a questo tempo, se i corpi non ricevessero dall' azione della gravità in eguali istanti eguali gradi di velocità, o sia se la gravità non operasse costantemente ed uniformemente. Posto inoltre che le velocità sono come i tempi, ne segue che gli spazj trascorsi dalla quiete debbono crescere nella ragione de' numeri impari. Imperocchè dopo 2″ si trovano nel grave due velocità: l' una impressà sul fine del primo 1″, e l'altra generata nella durata del secondo 1″; in virtù della prima il grave descrive uno spazio doppio di quello che ha descritto nel primo 1″ (num. 11), e in virtù della seconda uno spazio eguale a quello che ha percorso nel primo 1″. Laonde posto lo spazio nel primo 1″ come 1, lo spazio che il grave cadendo andrà a percorrere nel secondo 1″, sarà come 3. E similmente nel terzo 1″ le velocità impresse sono due, ed una terza se ne genera nel tempo del terzo 1″, per cui gli spazj saranno come 5, e così successivamente nel quarto 1″ come 7, ec. A questa legge poi si lega l'altra, che gli spazj descritti sono come i quadrati de' tempi. Se gli spazj crescono 1, 3, 5, 7, ec.; in 1″ lo spazio sarà 1, in 2″ sarà 4, in 3″ 9, in 4″ 16, ec.; e perciò gli spazj 1, 4, 9, 16 sono come i quadrati di 1, 2, 3, 4, che rappresentano i tempi corrispondenti. E così si possono tra loro connettere tutte le leggi cui ubbidiscono i gravi nella loro caduta.

15. Gli spazj adunque che descrivono i corpi in virtù della gravità, crescendo nella ragione dei quadrati dei tempi, ne segue che il *moto* dei gravi sia *accelerato*. E perchè cadendo acquistano un aumento continuo ed uniforme di velocità, per cui gli spazj da essi descritti crescono secondo una legge costante, ch'è quella dei numeri impari; perciò il loro moto si chiama (T. I, num. 27) *uniformemente accelerato*. La forza poi impressa dalla gravità, che operando costantemente su i corpi vicino alla superficie della terra genera nei medesimi un aumento continuo ed uniforme di velocità, si dice *forza acceleratrice*. Per lo che una tal forza si misura dalla velocità che genera in un dato tempo, e questa velocità dallo spazio che il grave è atto a percorrere con moto

uniforme nel medesimo tempo in cui è stata generata. E come questo spazio (num. 11) è doppio di quello che il grave ha percorso nel medesimo tempo in virtù dell'azione costante della gravità; così si ha in questo doppio spazio la misura della forza accelerativa della gravità. Posta la massa $=64m$ in movimento da $1/2m$, la forza accelerativa si estima 3 poll., perchè la velocità o la forza che $1/2\,m$ genera in 1″ è tale che fa percorrere al grave 3 poll. in 1″, o sia uno spazio doppio di quello che ha già percorso nel primo 1″; e se la medesima massa fosse eccitata al moto da m, la forza accelerativa sarebbe eguale a 6 poll., perchè la velocità generata in 1″ fa descrivere al mobile 6 poll. in 1″, o sia uno spazio doppio di quello che ha descritto nel primo 1″. E in generale la forza accelerativa cagionata dalla gravità nei corpi che cadono dalla quiete vicino alla superficie della terra, si estima per 32 piedi inglesi, o più esattamente metri 9,8088, perchè i gravi dopo aver descritto per la forza di gravità 16 piedi, o $4^m,9044$ in 1″, hanno ricevuto una velocità per cui sono atti a descrivere uno spazio doppio in 1″.

16. Misurandosi la forza accelerativa impressa dalla gravità, dalla velocità che produce in un dato tempo, viene da sè che può essa esprimersi pel rapporto della velocità al tempo; di modo che chiamata g questa forza accelerativa, sarà $g=\frac{v}{t}$. E perchè nella caduta dei corpi vicino alla superficie della terra le velocità crescono come i tempi; così il rapporto delle velocità ai tempi o sia la forza accelerativa è costante. Nel primo 1″ $g=\frac{v}{1}=32P=9^m,8088$, in 2″ sarà $g=\frac{2v}{2}=v=32P$, in 3″ sarà $g=\frac{3v}{3}=v=32P$, ec. Ora lo spazio doppio che il grave percorre con moto uniforme (T. I, num. 29) è eguale alla velocità moltiplicata pel tempo, o sia $2s=vt$, e $v=\frac{2s}{t}$; di modo che sostituendo questo valore di v in $g=\frac{v}{t}$, si avrà $g=\frac{2s}{t^2}$, e *la forza accelerativa si potrà esprimere pel doppio spazio diviso pel quadrato del tempo.* E se nell'equazione $2s=vt$ si prenderà il valore

di t, si avrà $\frac{2s}{v} = t$, il quale valore sostituito in $g = \frac{v}{t}$ ci somministrerà un'altra espressione $g = \frac{v^2}{2s}$, o sia *la forza accelerativa della gravità è eguale e proporzionale al quadrato della velocità diviso pel doppio spazio.*

17. Si può ora conoscere come data una delle tre quantità, tempo, spazio e velocità, si vanno a rinvenire le altre due nella caduta dei gravi. Essendo gli spazj come i quadrati dei tempi, si ha lo spazio $s = 16t^2 = \frac{gt^2}{2}$. Ed al contrario dato lo spazio s, si conoscerà dalla stessa formola il tempo, perchè $t = \frac{\sqrt{s}}{4}$. E parimente essendo le velocità come i tempi, e la velocità in $1'' = 32$P si può trovare la velocità $= 32t = gt$. Ma se data la velocità ci piacesse di rinvenire il tempo, si avrebbe $t = \frac{v}{32} = \frac{v}{g}$. E se questo valore di t si volesse sostituire nella formola $s = 16t^2$, ne risulterebbe $s = \frac{16v^2}{32^2} = \frac{v^2}{64} = \frac{v^2}{2g}$; di modo che conosciuta la velocità si va subito a determinare lo spazio descritto, o sia l'*altezza dovuta a questa velocità.* Finalmente dalla formola $s = \frac{v^2}{64}$, se ci fosse noto lo spazio s e si cercasse la velocità v, si potrebbe immantinente ritrarre facendo $v = 8\sqrt{s} = \sqrt{2gs}$. E così si ritrova *la velocità dovuta ad un'altezza data*, qual è s.

18. Queste formole riescono utilissime in tutta la dinamica. Siccome un grave cadendo è atto a descrivere colla sua velocità finale uno spazio doppio con un moto uniforme; così qualunque moto uniforme si può supporre generato dalla caduta di un grave. Posto che un corpo ha descritto con moto uniforme 100 piedi in 3″ o sia colla velocità $= \frac{100}{3}$, si può colla formola $\frac{v^2}{64}$ ritrovare l'altezza dovuta alla sua velocità; poichè da $\frac{10000}{9 \times 64}$ verrebbe l'altezza dovuta presso a 17 piedi. Ed in que-

sto modo il moto prodotto dalle forze istantanee riferir si potrebbe a quello generato dalla gravità.

19. Se alla forza gravità sostituir si voglia altra forza continua che al par della gravità imprime un egual grado di velocità in ogni singolo istante, o sia delle velocità proporzionali ai tempi; questa forza continua genera al par della gravità un *moto uniformemente accelerato*. Di modo che posto un moto uniformemente accelerato, è da supporsi una forza continua che genera eguali e uniformi gradi di velocità; e data una forza continua che genera delle velocità nella ragione dei tempi, ne deve risultare un moto uniformemente accelerato. E però il moto uniforme si distingue dal moto uniformemente accelerato in ciò, che il primo ha una velocità costante, come quello che nasce dall'impulso di una forza istantanea, e il secondo è fornito di una velocità che cresce nella ragione dei tempi, perchè proviene da una forza continua che imprime eguali e uniformi gradi di velocità in ogni singolo istante.

20. Ora le leggi che si osservano in qualunque moto uniformemente accelerato, sono quelle stesse che notato abbiamo parlando della gravità; e Galileo, che fu il primo a conoscerle, l'espresse sotto una forma geometrica nel triangolo rettangolo ANM (*fig.* 2). In questo triangolo, AN rappresenta il tempo, e le parti eguali Ac, cd, dg, gi, ec., esprimono gl'istanti eguali e infinitamente piccoli del tempo AN. Rappresenta inoltre NM la velocità acquistata dal mobile in virtù della forza continua e uniforme in fine del tempo AN. Per lo che le rette cl, df, gh, ik, ec., condotte paralelle a NM denotano le velocità acquistate dal mobile nei singoli istanti Ac, cd, ec. Imperocchè per la simiglianza dei triangoli Acl, Adf, ec. ANM, sarà $Ac : cl :: Ad : df :: AN : NM$; o sia le velocità crescono nella ragione dei tempi giusta il carattere del moto egualmente accelerato. Ora queste rette, che rappresentano le velocità, sono da considerarsi come infinite di numero tra A e c, tra c e d, ec., perchè la forza operando continuamente imprime in ogni momento una nuova velocità, e però la somma di tutte le velocità corrispondenti a tutti i singoli istanti di tempo è rappresentata dall'aja tutta del triangolo ANM, che per questa ragione suol chiamarsi *il piano delle velocità*.

21. La velocità acquistata dal mobile nella durata del tempo infinitamente piccolo, o, come dicesi, nell'elemento del tempo *Ac*, è rappresentata dalla superficie *Acl*, che si considera come l'elemento della superficie del triangolo *ANM*. E perchè questo elemento *Acl* della superficie $= Ac \times cl$, essendo *Ac* infinitamente piccolo, o sia è eguale al prodotto della velocità per l'elemento del tempo; perciò l'elemento della superficie potrà anche rappresentare l'elemento dello spazio che la forza continua fa descrivere al mobile. Imperocchè riguardandosi la velocità nella durata dell'elemento del tempo *Ac* come uniforme, e il moto parimente come uniforme, lo spazio (T. I, num. 29) sarà eguale alla velocità multiplicata per l'elemento del tempo, ossia all'elemento *Acl* della superficie. Questo elemento adunque *Acl* della superficie, come rappresenta la velocità acquistata nell'elemento del tempo *Ac*, così rappresenta l'elemento dello spazio descritto nel medesimo istante *Ac*, e lo spazio in questo modo si può considerare come proporzionale alla velocità. E però la superficie del triangolo *ANM* rappresenta non solo la somma delle velocità acquistate nei singoli instanti, ma ancora quella degli spazj descritti nel tempo *AN*.

22. Dalla inspezione del triangolo *ANM*, in cui descritti si veggono le velocità, i tempi e gli spazj, facilmente si conoscono e quasi leggonsi le proprietà del moto egualmente accelerato. La superficie *Acl* rappresenta lo spazio descritto nell'istante *Ac*; la superficie *Adf* indica lo spazio trascorso in due istanti eguali o nel tempo *Ad*; la superficie *Agh* esprime lo spazio perfezionato in tre istanti eguali, o nel tempo *Ag*, e così successivamente. E siccome le superficie dei triangoli simili *Acl*, *Adf*, *Agh*, ec., sono tra loro come i quadrati dei loro lati omologhi *Ac*, *Ad*, *Ag*, ec., ovvero come i quadrati di *cl*, *df*, *gh*, ec.; così è in primo luogo da conchiudersi a prima proprietà del moto uniformemente accelerato, che *gli spazj in questa maniera di moto crescono e sono proporzionali ai quadrati dei tempi impiegati a descriverli, ovvero delle velocità in essi tempi acquistate*. Si può quindi esprimere sotto un'altra forma la differenza da noi indicata (num. 19) tra il moto uniforme ed uniformemente accelerato, dicendo che nel moto uniforme gli spazj sono proporzionali ai semplici tempi

(T. I, num. 29), e nel moto egualmente accelerato ai quadrati de' tempi.

23. Nel triangolo ANM lo spazio descritto nel primo istante Ac è rappresentato dalla superficie Acl; lo spazio trascorso nel secondo istante cd è espresso dalla superficie $cdfl$, che comprende tre superficie, delle quali ciascuna è eguale alla superficie Acl; lo spazio descritto nel terzo istante dg è rappresentato da cinque superficie eguali, ec. *Gli spazj* dunque *in ciascuno istante eguale e successivo crescono nella ragione dei numeri impari* 1, 3, 5, ec. È questa la seconda proprietà del moto uniformemente accelerato, che è un conseguente o meglio un' espressione diversa della prima.

24. Se in fine del tempo AN (*fig.* 2) cessa l'azione della forza costante, e il mobile continua a muoversi colla velocità NM ultimamente acquistata, certamente il suo moto sarà uniforme, e lo spazio descritto con questa velocità nello stesso tempo AN sarà rappresentato dalla superficie del paralellogrammo $ANMB$; perciocchè così la superficie $ANMB$, come lo spazio trascorso nel tempo AN colla velocità NM risultano da $NM \times NA$. E siccome la superficie $ANMB$ è doppia della superficie ANM; così è da stabilirsi a terza proprietà del moto uniformemente accelerato, che *di due spazj trascorsi in egual tempo, l'uno con moto uniformemente accelerato, l'altro con moto uniforme e colla celerità finale di quello, il secondo è doppio del primo.*

25. Conosciuto il carattere e poste le proprietà del moto uniformemente accelerato, è facile di estimare come dagli effetti il valore della forza accelerativa che produce questa maniera di moto. Il primo effetto della forza è quello d'imprimere al mobile, sopra il quale opera, delle velocità proporzionali ai tempi, e questo rapporto costante tra le velocità e i tempi ci può servire come misura della forza. Chiamando adunque dt l'elemento del tempo, dv l'elemento della velocità, 1 l'unità del tempo, e f la forza, si avrà $f = \frac{1}{dt} \times dv = \frac{dv}{dt}$.

26. Si vede da ciò, che sebbene f in un numero diverso d' istanti o in diversi tempi finiti esprime gradi diversi di velocità; pure il suo valore è costante, perciocchè risulta dal rapporto delle velocità ai tempi ch'è costante. Vale lo stesso dire $f = \frac{dv}{dt} = \frac{2dv}{2dt} = \frac{3dv}{3dt}$, ec. $= \frac{v}{t}$.

Risulta di più dall'espressione $f = \frac{1}{dt} \times dv$, che la forza accelerativa altro non esprime che una velocità finita, la quale risulta dall'elemento dv moltiplicato pel numero degl'istanti che si racchiudono in un tempo finito, o sia nell'unità di tempo. E siccome questa velocità finita suol valutarsi per lo spazio che nell'unità di tempo il mobile percorre in virtù di essa con moto uniforme; così la forza accelerativa è rappresentata (num. 15) dal doppio dello spazio che il mobile nell'unità di tempo ha percorso con moto uniformemente accelerato, o sia in virtù dell'azione costante della stessa forza accelerativa. E però la forza accelerativa f può esprimersi in tre forme differenti, siccome abbiamo osservato (numero 16) trattando della forza accelerativa impressa dalla gravità, cioè a dire: $f = \frac{v}{t}$, che nasce dal rapporto costante della velocità al tempo, e posto $t = 1$ sarà $f = v = 2s$; l'altra è $f = \frac{2s}{t^2}$; e la terza è $f = \frac{v^2}{2s}$.

27. Conoscendosi il valore delle forze accelerative, si possono paragonare tra loro i varj moti uniformemente accelerati, paragonando tra loro i valori rispettivi di quelle forze, per mezzo della formola $f = v = 2s$. Così se il corpo ha descritto in 1″ 3poll., e l'altro 6poll., il valore di f nel primo moto egualmente accelerato è 6poll., e nel secondo è = a 12poll.; laonde il primo sta al secondo come 6 sta 12. Di che si fa chiaro che il moto uniforme serve a comparare tra loro i moti uniformemente accelerati; perciocchè dallo spazio descritto con moto uniforme e in virtù della velocità finale si misura il rapporto delle forze accelerative o dei moti egualmente accelerati, a cui esse forze appartengono. E perchè d'ordinario la gravità si piglia per unità delle forze accelerative, o sia ad essa si rapportano tutte le altre; perciò si piglia ad unità di tempo il 1″, ad unità di velocità quella della gravità, ad unità di spazio quello di 32p o meglio di 9m,8088; e ridotte così le forze, gli spazj, le velocità e i tempi a semplici rapporti, la dinamica diventa un oggetto puramente matematico, siccome si è da noi osservato nel moto uniformemente accelerato (n. 20).

28 Dalla considerazione della gravità che opera nella caduta verticale dei corpi, eccitandoli dalla quiete al

movimento, ci è venuto fatto di ricavare le leggi a norma di cui esercitano la loro azione le forze costanti, ed abbiamo stabilito la dottrina del moto uniformemente accelerato. Ma ora in luogo di supporre corpi in quiete, ed eccitati dalla gravità, li riguardiamo forniti di un moto uniforme, ma contrastati nel muoversi dall'azione continua della gravità, che opera in opposizione e in senso contrario alla direzione del loro movimento, o sia consideriamo la gravità come se fosse una causa di resistenza al moto. E come da un sì fatto contrasto continuo tra l'azione della gravità e la velocità impressa ai corpi ne segue un ritardo nel movimento uniforme dei medesimi; così tenteremo di ritrarre le leggi dei moti varj e ritardati.

Esperimento V.

Fatto $A = 24\ {}^1/_2 m$ (*fig.* 1), e $B = 25\ {}^1/_2 m$, si mettano sopra A due sbarre $F = 2m$. Indi si fermi l'anello D a 26poll., 44 della scala, e 'l sostegno C a 52poll. Dopo ciò A cadendo da zero lascerà le due sbarre nell'anello, e colla velocità acquistata per lo spazio descritto di 26poll., 44 in 3″ in circa proseguirà a muoversi e a scendere. Ma si osserverà che A nel tempo di quasi 3″ giungerà sino a C descrivendo 26poll., 6, e poi distrutto il suo moto comincerà a salire per cagione della massa di B ch'è maggiore.

29. La massa posta da principio in movimento dalla gravità $= 63m$, nel tempo di quasi 3″ descrive 26poll., 44, e perciò (num. 11) è atta a percorrere nello stesso tempo 54poll., o sia acquista una velocità $= 54/3 = 18$poll. in 1″. Come A lascia le due sbarre, la massa, animata da questa velocità di 18poll. in 1″, è $= 61m$, e la differenza tra A e $B = m$. La massa dunque $= 61m$ si può considerare come sospinta da una velocità $= 18$poll. in 1″; ma questa velocità è contrastata dall'azione continua della gravità $= m$. Poichè nell'atto che A scende in virtù della velocità acquistata, B lo sospinge continuamente all'insù, come quello ch'è maggiore di peso. Indi è che A in luogo di descrivere 54poll. in 3″, come dovrebbe in virtù della velocità acquistata, per l'azione della forza continua e contraria $= m$, appena potrà perfezionare lo spazio di 25poll., 6. In fatti come A tocca C, vinto già dalla forza $= m$, comincia a salire.

Esperimento VI.

Sia $A = 26m$, $B = 26\ ^1/_2m$, le sbarre poste sopra $A = 1\ ^1/_2m$, e sia l'anello fermato a 11poll.,877 della scala, e 'l sostegno a 33poll.,83. Ciò fatto, cominciando A a calare da zero, lascia le sbarre dopo aver descritto 11poll.,877 in 2″, e colla velocità acquistata continua a scendere e giunge a toccare C dopo aver descritto 21poll.,95 in 3″, dove mutando direzione comincia a salire.

30. La massa, posta dalla quiete in movimento dalla gravità, $= 65m$, e l'azione continua della gravità $= m$; la massa $65m$ colla forza $= m$ descrive in 2″ 11poll., 877, e in virtù di questo spazio descritto acquista una velocità $=$ 11poll.,877 in 1″. Ma come resta sull'anello una parte della massa, o sia le sbarre $= 1\ ^1/_2m$, si può considerare la massa $= 63\ ^1/_2m$, come sospinta da una velocità $=$ 11poll.,877 in 1″, la quale è contrastata nel suo movimento uniforme dall'azione continua della gravità $= {}^1/_2m$. Risulta da questo contrasto che A in luogo di scendere nel tempo di 3″, percorrendo lo spazio35 poll., 631, non descrive che 21poll., 95; perciocchè vinta a poco a poco la velocità impressa ed uniforme dall'opposizione continua della gravità $= {}^1/_2m$, A non può più scendere, e tirato da B comincia a salire.

31. Nel V esperimento la velocità di cui è animata la massa $61m =$ 18poll. in 1″, e la gravità che opera in in senso contrario $= m$. La prima è una velocità costante, e la velocità impressa dalla gravità cresce nella ragione dei tempi. Da quella ne deriva un moto uniforme, e da questa un moto uniformemente accelerato. Il moto adunque che ne risulta è composto di un moto uniforme e di un moto uniformemente accelerato. Ciascuno di questi due moti si conserva come se fosse solo nel mobile; e come le direzioni dei due moti sono in senso contrario, così lo spazio che si trascorre dalla massa $61m$ nel tempo di 3″, dev'essere eguale (T. I, num. 43) alla differenza degli spazj che la medesima massa avrebbe trascorso separatamente in virtù delle due cause che producono i due diversi movimenti; di modo che il risultato o sia lo spazio trascorso sarà quello stesso che avrebbe luogo se i due moti fossero stati impressi separatamente e successivamente. In fatti la massa $61m$ in

virtù della velocità = 18$^{poll.}$ in 1″ avrebbe descritto 54$^{poll.}$ in 3″, e per l'azione della gravità = m avrebbe trascorso nel primo 1″ 3$^{poll.}$, 16, nel secondo 1″ 9$^{poll.}$, 48, nel terzo 1″ 15$^{poll.}$, 80, che formano lo spazio = 28$^{poll.}$, 44. E siccome la differenza tra questi due spazj, o sia 54$^{poll.}$ — 28$^{poll.}$, 44 = 25$^{poll.}$, 6; così la massa 61m deve trascorrere in 3″ lo spazio di 25$^{poll.}$, 6, come si è osservato nell'esperimento V. Gli spazj adunque che descrive la massa 61m sono nel primo 1″ 18$^{poll.}$ — 3$^{poll.}$, 16 = 14,84, nel secondo 1″ 18$^{poll.}$ — 9$^{poll.}$, 48 = 8$^{poll.}$, 52, nel terzo 1″ sono 18$^{poll.}$ — 15$^{poll.}$, 80 = 2$^{poll.}$, 20; o sia gli spazj van decrescendo 14$^{poll.}$, 84 nel primo 1″, 8$^{poll.}$, 52 nel secondo 1″, 2$^{poll.}$, 20 nel terzo 1″, e il moto si va successivamente ed egualmente ritardando di 6$^{poll.}$, 32.

Nel VI esperimento parimente la massa 63 1/2m è animata di una velocità = 11$^{poll.}$, 877 in 1″, di modo che in 3″ deve percorrere 35$^{poll.}$, 631. Ma nello stesso tempo è sospinta dall'azione della gravità = 1/2m, la quale nel primo 1″ = 1$^{poll.}$, 52, nel secondo 1″ = 4$^{poll.}$, 56, nel terzo 1″ = 7$^{poll.}$, 60 ossia in 3″ = 13$^{poll.}$, 68. Ora la differenza tra questi spazj descritti con moto uniforme e uniformemente accelerato, cioè 35$^{poll.}$, 631 — 13$^{poll.}$, 68 = 21$^{poll.}$, 95, come risulta dall'esperimento. E però la massa 63 1/2m descrive nel primo 1″ lo spazio 11$^{poll.}$, 877 — 1$^{poll.}$, 52 = 10$^{poll.}$, 357; nel secondo 1″ lo spazio 11$^{poll.}$, 877 — 4$^{poll.}$, 56, = 7$^{poll.}$, 317; nel terzo 1″ lo spazio 11$^{poll.}$, 877 — 7$^{poll.}$, 60 = 4$^{poll.}$, 277, o sia gli spazj decrescono 10$^{poll.}$, 357, 7$^{poll.}$, 317, 4$^{poll.}$, 277, e 'l moto è successivamente ed egualmente ritardato di 3$^{poll.}$, 040.

32. Dalla dichiarazione di questi esperimenti risulta che nel moto rettilineo, ove un mobile è animato contemporaneamente da una forza istantanea e dall'azione della gravità che opera in senso contrario, questa va distruggendo la velocità impressa dalla forza istantanea, e ne nasce un moto ritardato. E perchè l'azione della gravità è costante, e in tempi eguali va distruggendo eguali gradi di velocità; perciò ne viene un *moto* che dicesi *uniformemente ritardato*, e la forza cagionata dalla gravità, che opera continuamente e uniformemente in senso contrario, chiamasi *forza ritardante*. Così nell'esperimento VI la forza ritardante è rappresentata da 1/2m, e la massa 63 1/2m si muove con un moto uniformemente ritardato descrivendo gli spazj (num. 31) come

10, 7, 4, la cui differenza $= 3$. E però la formola di questo movimento esprime la differenza dei due movimenti, e riducesi allo spazio $s = vt - \frac{gt^2}{2}$.

33. Se in luogo della gravità si considera una forza costante qualunque che opera in senso contrario alla forza istantanea impressa ad un mobile, non ci è dubbio che ne risulta un moto uniformemente ritardato; perciocchè operando in senso contrario, distrugge eguali ed uniformi gradi di velocità, o sia produce un ritardo uniforme nel movimento. Dato dunque un moto uniformemente ritardato, è da supporsi una forza costante che opera in senso contrario alla velocità impressa ad un mobile; e posta una sì fatta forza, che contrasta uniformemente la velocità impressa ad un mobile, è certo che un moto ne risulta uniformemente ritardato. Questa verità è espressa chiaramente nella *fig.* 2. Sia lanciato all'insù un corpo colla velocità *rs*, e sia insieme sospinto da una forza costante che nei singoli elementi di tempo va distruggendo un eguale ed uniforme elemento di velocità rappresentato da *cl*, è chiaro che la velocità *rs* in fine del primo elemento di tempo *ri* diventerà *ik*, perocchè $rs - cl = ik$. In fine del secondo elemento di tempo *ig*, la velocità *rs* diventerà *gh*, perchè $rs - 2cl = gh$; e così successivamente in fine di *gd* si ridurrà *rs* a *df*, e nel tempo *dc* la velocità *rs* per le continue, successive ed eguali diminuzioni non sarà che *cl*; d'onde si vede che i decrementi di velocità sono nella ragione dei tempi. E parimente in fine di *ri* il mobile ha descritto lo spazio *rîks* come 9, in fine di *ig* uno spazio *ighk* come 7, in fine di *gd* uno spazio come 5, e poi uno come 3, e finalmente lo spazio *eAl* come 1. E però descrivendo egualmente gli spazj 9, 7, 5, 3, 1, il moto del mobile lanciato colla velocità $= rs$, e contrastato dalla forza costante, è un moto uniformemente ritardato.

34. Le proprietà adunque del moto uniformemente ritardato sono in senso contrario eguali a quelle che abbiamo dimostrato convenirsi al moto uniformemente accelerato; imperciocchè nell'uno le velocità crescono, e nell'altro le velocità decrescono nella ragione dei tempi. E però nel moto uniformemente accelerato gli spazj crescono nella ragione dei numeri impari 1, 3, 5, 7, 9, ec., e nel moto uniformemente ritardato decrescono nella ra-

gione de' numeri impari 9, 7, 5, 3, 1. E come nel moto uniformemente accelerato gli spazj crescono nella ragione dei quadrati dei tempi; così nel moto uniformemente ritardato decrescono nella ragione dei quadrati dei tempi. In fatti colla celerità *rs* (*fig.* 2) nel tempo *ri* gli spazj descritti sono come 9 in luogo di essere come 10, e nel tempo *ig* sono come 7 in luogo di essere come 10; di modo che in due tempi gli spazj sono decresciuti $1+3=4$, che è il quadrato di 2. E successivamente nel tempo *gd* gli spazj descritti sono come 5 in luogo di essere come 10, e unendo il decremento degli spazj come 5 a quello come 4 si ha in 3 tempi un decremento come 9, che è il quadrato di 3, e così del resto. Finalmente la superficie del triangolo *NAM* rappresenta lo spazio descritto da un mobile nel tempo *NA* con moto uniformemente ritardato, e lanciato all' insù colla velocità *NM*; perchè una forza costante distruggendo in ogni singolo elemento di tempo una velocità eguale *cl*, giunge ad estinguere in *A* tutta la velocità *NM*, da cui era animato il mobile. La stessa superficie *NAM* esprime lo spazio che trascorre un mobile con moto uniformemente accelerato, il quale partendosi dalla quiete giunge nel tempo *AN* ad acquistare la velocità *NM* in virtù di una forza costante che imprime in ciascuno elemento di tempo un grado eguale di velocità *cl*. E in verità, sia che gli spazj crescano 1, 3, 5, 7, 9, o pure decrescano 9, 7, 5, 3, 1, la somma totale di questi spazj sarà sempre la stessa così nel primo caso in cui il moto è uniformemente accelerato, come nel secondo in cui il moto è uniformemente ritardato. E però è da conchiudersi che, *se la velocità con cui è lanciato un corpo, movendosi con moto uniformemente ritardato per cagione di una forza costante, è eguale alla velocità finale che avrebbe acquistato il corpo movendosi in tempi eguali con moto uniformemente accelerato in virtù della stessa forza costante, le somme totali degli spazj descritti in tempi eguali tanto con moto uniformemente accelerato, quanto con moto uniformemente ritardato, sono eguali.* Indi è che i meccanici hanno stabilito, come un teorema, che *la velocità acquistata da un corpo cadendo in virtù della gravità, o di altra forza continua, può farlo risalire all' altezza da cui partì.*

35. La forza ritardante adunque non è altro che la

forza accelerativa che opera come resistenza, e il suo valore è quello stesso che già abbiamo ritrovato per la forza accelerativa (num 25), purchè questo valore si noti col segno negativo per indicare che ritarda e distrugge secondo una legge data il movimento. Però chiamando f la forza ritardante, sarà essa $f = -\frac{dv}{dt}$, o pure $f = -\frac{v}{t}$, e nell'unità di tempo $f = -v = -2s$. E in generale la forza ritardante sarà rappresentata dal doppio spazio descritto nell'unità di tempo preso negativamente. Per lo che chiamando s lo spazio descritto col moto uniformemente ritardato in un tempo qualunque t, v la celerità impressa al mobile, f la forza ritardante, sarà $s = vt - \frac{ft^2}{2}$, e conosciuto s si può ricavare il valore di v o di t.

CAPO II.

DELLA CADUTA DE' CORPI LUNGO UN PIANO INCLINATO.

36. L'azione della gravità che anima un corpo situato sopra un piano inclinato, si può sciogliere in due (T. I, num. 54), l'una perpendicolare e l'altra paralella al piano. La prima è distrutta dalla resistenza del piano, e l'altra che resta eccita al movimento il corpo, e opera le sua discesa lungo il piano inclinato. L'azione intera della gravità, in virtù di cui il corpo scenderebbe verticalmente se non fosse impedito dal piano, rappresenta la *forza assoluta della gravità;* e quella parte della forza assoluta che opera la discesa e il moto lungo il piano inclinato si chiama *forza relativa della gravità.* Ora la forza relativa, come quella ch'è una parte dell'assoluta, ha la stessa indole ed esercita a norma delle stesse leggi la sua azione, siccome è stato da noi dimostrato coll'esperienza (num. 9); e però è che una forza costante genera in tempi eguali eguali gradi di velocità, e produce nel corpo che scende pel piano un moto uniformemente accelerato. I corpi adunque calano lungo i piani inclinati con moto uniformemente accelerato, scendendo descrivono degli spazj che crescono come i quadrati dei

tempi, ec. (num. 7). In fatti Galileo dalla discesa dei corpi per li piani comunque inclinati ne ritrasse le leggi della caduta ed accelerazione dei gravi; e applicandosi un piano inclinato, distinto in pollici, all' asta verticale della macchina di Atwood, si dimostra coll'esperimento che il moto dei corpi che scendono per li piani inclinati è uniformemente accelerato.

37. È facile dopo questa considerazione di conoscere il rapporto che passa tra la velocità acquistata da un corpo nella discesa pel piano inclinato, e la velocità ch'esso corpo avrebbe acquistato se nel medesimo tempo fosse caduto liberamente e verticalmente. Poichè altro non è da farsi, pel num. 35, che comparare tra loro le due forze acceleratíve, che nel nostro caso sono rappresentate dalla forza assoluta e relativa della gravità. Ora sebbene la forza relativa cresce o decresce secondo l' inclinazione del piano; pure sotto qualunque angolo d' inclinazione il rapporto tra la forza relativa ed assoluta è costante, e per le leggi della statica (Tomo I, num. 115) sempre la forza relativa sta all'assoluta come l'altezza sta alla lunghezza del piano. Le velocità adunque acquistate da un corpo che cade lungo un piano inclinato sono a quelle acquistate dal medesimo corpo che in un tempo eguale cade verticalmente e liberamente, come l' altezza alla lunghezza del piano. E però gli spazj descritti sono del pari come l'altezza alla lunghezza del piano. Chiamando adunque g la forza assoluta, g' la relativa, s lo spazio descritto in virtù di g, s' lo spazio descritto in virtù di g', v e v' le velocità, a l' altezza del piano, e l la lunghezza, si avrà $g : g' :: l : a :: v : v' :: s : s'$. Per lo che data l' altezza e la lunghezza del piano, si ricava immantinente g', ossia la gravità scomposta giusta la lunghezza del piano, v' e s'. Così $\frac{ga}{l} = g' = s' = \frac{gat^2}{2l}$ pel num. 17, $v' = \frac{va}{l} = \frac{ga}{l}\, t$ pel num. 16, e sostituendo a t il suo valore ricavato dall' equazione di s', sarà $v' = \sqrt{\frac{2gas'}{l}}$. Finalmente dall' equazione di s' si ricava il tempo, ove è conosciuto lo spazio. Di fatto volendo sapere il tempo che impiega il grave per correre la lunghezza del piano inclinato, si avrà, facendo $s' = l$, $t = \sqrt{\frac{2l^2}{ga}}$, e $v' = \sqrt{2ga}$.

Esperimento I.

Se due corpi cominciano a scendere nel medesimo istante da F (*fig.* 3) si osserverà che l'uno descrive verticalmente l'altezza FO nel medesimo tempo che l'altro giunge al punto N sul piano, in cui la perpendicolare condotta dall'angolo opposto FOH taglia il piano FH.

Esperimento II.

Se due corpi a e b lasciansi cadere (*fig.* 4) l'uno pel canale F, che rappresenta il diametro verticale del circolo AFB, e l'altro lungo il canale E, che rappresenta una corda del medesimo circolo guidata dall'estremità del diametro verticale, questi due corpi partendosi nel medesimo istante da E e F descriveranno nel medesimo tempo la corda e il diametro.

38. Questi esperimenti ci annunziano la medesima verità sotto due forme differenti. Siccome guidata la perpendicolare ON (*fig.* 3) il triangolo ONF è simile all'altro FOH, così risulta FH sta FO come FO sta FN; e però i due spazj FO e FN sono tra loro come la lunghezza e l'altezza del piano, come debbono essere quando sono percorsi in tempi eguali (num. 37). E come il canale F (*fig.* 4) è rappresentato dall'altezza verticale FO (*fig.* 3), e 'l canale E (*fig.* 4) è rappresentato dalla corda FN; così viene ad esprimersi col diametro l'altezza di un piano, e colla corda quella parte dello stesso piano inclinato ch'è tagliata dalla perpendicolare ON; giacchè qualunque angolo iscritto al cerchio che poggia sul diametro è sempre retto. Gli spazj quindi FO, FN si percorrono in tempi eguali. Per la stessa ragione nel piano inclinato FnO (*fig.* 5) gli spazj FO, Fn saranno descritti in tempi eguali, ed in conseguenza anche le corde ON, On. E in generale siccome il diametro verticale di un cerchio può sempre rappresentare l'altezza perpendicolare di un piano inclinato, e le corde del medesimo cerchio guidate dall'estremità del diametro verticale possono rappresentare le parti di un piano, che sono definite dall'intersecazione della perpendicolare condotta dall'angolo opposto al pia-

no; così è da conchiudersi che *tutte le corde di un cerchio che finiscono ad una estremità del suo diametro verticale sono descritte per l'azione della gravità nel medesimo tempo in cui è descritto questo diametro.*

39. Confrontando in fine la velocità acquistata dal grave in fine della caduta lungo l'altezza a quella che acquista cadendo per la lunghezza di un piano inclinato, si vede che ambedue queste velocità sono eguali. Poichè, pel num. 37, $v' = \sqrt{2ga}$; e parimente per la caduta verticale, giusta il num. 16, $v = \sqrt{2ga}$. E però è da stabilirsi che la *velocità finale acquistata da un corpo che cade verticalmente per l'altezza di un piano inclinato, è eguale alla velocità acquistata in fine della discesa di un corpo che si muove lungo il piano inclinato.*

40. Queste dottrine ci aprono la via a conoscere in quale rapporto stanno tra loro le velocità che acquistano i corpi, e i tempi che impiegano nello scendere per due piani inclinati. Primieramente, pel num. 39, si possono sostituire alle velocità acquistate in fine della discesa lungo i piani quelle che pigliano in fine della caduta verticale per le loro altezze. E come queste sono $\sqrt{2ga}$, e $\sqrt{2ga'}$; così le velocità sono come $\sqrt{a}$ a $\sqrt{a'}$; e però le *velocità* finali di due *corpi che han disceso lungo due piani inclinati sono come le radici quadrate delle altezze di questi piani.* Che se queste altezze sono eguali, eguali parimente saranno le due velocità finali.

41. In secondo luogo, se i piani inclinati hanno altezze eguali, i tempi della discesa sono nello stesso rapporto delle lunghezze dei piani. Poichè, pel num. 37, saranno come $\sqrt{\frac{2l^2}{ga}}$ a $\sqrt{\frac{2l'^2}{ga'}}$, ed essendo $a = a'$, saranno come $\sqrt{l^2}$ a $\sqrt{l'^2}$, o sia come l a l'. Il che si esprime dicendo: *se due piani inclinati hanno la medesima altezza, i tempi della caduta di un corpo sopra questi piani sono come le loro lunghezze.*

42. Si può di più affermare che se un corpo discende lungo i piani inclinati AB, BC, CD, DE (*fig.* 6), la sua velocità acquistata in fine della discesa è come $\sqrt{AG}$. Poichè non vi ha dubbio, pel num. 39, che la velocità del corpo in B sia eguale a quella che acquistato avrebbe in K cadendo verticalmente da A. E parimente scendendo per BC acquisterebbe la stessa velocità che piglierebbe per BL, perchè questi due piani hanno la

medesima altezza IK. E similmente in D e in E acquisterebbe le stesse velocità che in M e in N, ossia come in H ed in G. Vale dunque lo stesso scendere per $ABCDE$, che pel piano AF, e però acquista la stessa velocità $= \sqrt{AG}$. È solo da avvertire che gli angoli che formano i piani contigui AB, BC, CD, ec., debbono essere così ottusi che la loro differenza da due retti sia una quantità infinitamente piccola, o come un *evanescente;* perchè allora la velocità che perde il mobile in ogni cangiamento di direzione è così piccola, che si può trascurare senza un errore sensibile, come quella che dai matematici è stata calcolata per una quantità infinitesima non del primo, ma del secondo ordine. Del resto si può leggere l'elegante dimostrazione che D'Alembert ha dato di questa verità nella sua *Dinamica.* Si assume quindi come certo, che *i corpi i quali discendono da una data altezza acquistano sempre la medesima velocità finale, sia che scendano per uno o per più piani inclinati, e la loro velocità finale è espressa dalla radice dell'altezza.*

43. Scenda in fine un grave per li piani AB, BC, CD, DE (*fig.* 6), ed un altro per un numero simile di piani NO, OP, PQ, QR, (*fig.* 7), ma sieno le inclinazioni dei piani nella *fig.* 6 rispettivamente le stesse dei piani simili notati nella *fig.* 7, e le loro lunghezze rispettivamente proporzionali; cioè a dire $NO : AB :: OP : BC :: PQ : CD$, ec.: si ricerca in quale ragione sono i tempi impiegati dai due gravi a scorrere lungo questi piani simili e similmente situati?

In virtù del num. 36 $T : t :: \sqrt{AB} : \sqrt{NO}$; e $T' : t' :: \sqrt{BC} : \sqrt{OP}$; e similmente $T'' : t'' :: \sqrt{CD} : \sqrt{PQ}$; e finalmente $T''' : t''' :: \sqrt{DE} : \sqrt{QR}$. E perchè i piani sono omologhi, ne segue che $\sqrt{AB} : \sqrt{ON} :: \sqrt{BC} : \sqrt{OP} :: \sqrt{CD} : \sqrt{PQ}$, ec.; e che $T : t :: T' : t' :: T'' : t'' :: \sqrt{AB} : \sqrt{ON}$. D'onde risulta $T + T' + T'' + T''' : t + t' + t'' + t''' :: \sqrt{AB} : \sqrt{NO}$; o sia che i tempi della discesa sono nella medesima ragione come se ciascuno dei due mobili fosse passato per un solo piano della medesima inclinazione. Egli è dunque da tenersi come un teorema che *i tempi impiegati dai mobili a percorrere un numero qualunque di piani simili e similmente inclinati sono come le radici di due piani omologhi, o delle somme dei piani omologhi.*

44. La considerazione dei corpi che scendono per più

piani inclinati contigui tra loro, ci conduce naturalmente a quei che cadono lungo una curva; giacchè questa, quale che si sia, si può ravvisare come composta di un numero infinito di piani piccolissimi che sono differentemente inclinati. Sotto questo punto di vista un grave cadendo per l'arco BF (*fig.* 8) acquista la stessa velocità che piglierebbe cadendo verticalmente per l'altezza corrispondente DF; e se fosse spinto dalla gravità per AI (*fig.* 15), o per AK, o per AG, avrà una velocità finale, come se fosse caduto per l'altezza AE, AF, o AH; perchè AI, AK ed AG rappresentano molti piani contigui, ed AE, AF, o AH rappresentano le altezze corrispondenti di questi piani che sono piccolissimi ed infiniti di numero. E siccome, pel num. 42, in questo caso le velocità finali sono espresse dalle radici delle altezze; così si reputa come cosa dimostrata che *i corpi cadendo per una curva hanno in qualunque punto della curva la medesima velocità, come se cadessero dall' altezza corrispondente.* Dal che segue che *i corpi*, *tolta ogni altra resistenza*, *dopo di esser discesi lungo di una curva al punto più basso della medesima*, *possono rimontare ad un' altezza eguale a quella da cui si sono partiti* (num. 34) *in virtù delle velocità acquistate in fine della loro discesa.* E però le cose da notarsi nella caduta dei corpi lungo di una curva qualunque son due, cioè: *le velocità che acquistano i corpi nello scendere*, *sono eguali a quelle che acquisterebbero cadendo liberamente per l'altezza corrispondente ; e in virtù delle velocità acquistate possono risalire all' altezza da cui si son mossi* (V. Poisson, tomo I, num. 266).

45. Più difficile sarebbe conoscere il valore del tempo che un grave impiega cadendo per una curva qualunque; perciocchè questa ricerca non si può mandare ad effetto senza l'ajuto del calcolo sublime. Ci ristringiamo quindi a rinvenirlo nella caduta dei corpi per due archi simili; giacchè questi si possono riferire ai piani inclinati, che furono da noi considerati nel num. 43. E come i tempi in quel caso furono stabiliti nel rapporto delle radici della somma dei due piani; così è lecito di conchiudere che i tempi impiegati dai corpi a scorrere archi simili sono come le radici di questi archi. Anzi essendo gli archi simili tra loro come le rispettive periferie, e queste nella ragione dei loro diametri o raggi;

è da stabilirsi che *i tempi impiegati dai corpi a scendere per archi simili stanno tra loro nella ragione delle radici dei raggi dei corpi cui sì fatti archi appartengono.*

46. Ma non si può fare a meno di qui accennare alcune proprietà singolarmente della *cicloide*, curva che si descrive da un punto immobile della circonferenza di un cerchio che rivolgendosi discorre sopra un piano, non altrimenti che fa un chiodo della ruota di una carrozza che cammina. In questo senso la curva *PZp* (*fig.* 10) è una cicloide, il circolo *roZ*, che fa la sua rivoluzione avanzandosi lungo *Pp*, si chiama *circolo generatore*, e *Pp* la *base della cicloide*; il diametro *Zr*, che cadendo verticalmente sulla base *Pp* divide la cicloide in due parti eguali, si dice l'*asse*, e 'l punto *Z* il *vertice della cicloide*; le rette paralelle *Ts*, *nm* sono le ordinate, *Zm*, *Zs* le ascisse, e *TG*, *ng* le tangenti della cicloide ai punti *T* e *n*.

Esperimento III.

Se la base *Pp* della cicloide *PZp* si trova, come essa si vede, paralella all'orizzonte, e i corpi discendono da diversi punti *p*, *T*, *n* dell'arco cicloidale sino al punto più basso *Z*, si osserva che i tempi della loro discesa in virtù della sola gravità sono eguali.

47. Si raccoglie da questo esperimento, che da qualunque punto comincia un grave a scendere lungo di una cicloide, giunge sempre nel medesimo tempo sino al punto più basso, ed ha la sua ragione in ciò, che l'energia della gravità essendo sempre proporzionale agli spazj da percorrersi *pZ*, *TZ*, *nZ*, i tempi della discesa debbono risultare sempre eguali (T. I, num. 34). Ed in verità la tangente *TG*, come si dimostra dalla geometria, è paralella alla corda *oZ* corrispondente del circolo generatore, e la tangente *ng* è ancora paralella alla corda corrispondente *aZ*; e perciò la forza accelerativa in *T*, punto comune all'arco cicloidale e alla tangente *TG*, è eguale alla forza accelerativa in *o*; e la forza in *n*, punto comune alla tangente e all'arco della cicloide, è eguale a quella in *a*. E come le corde *oZ*, *aZ*, ec., si percorrono (num. 38) tutte in tempi eguali, o sia in virtù di forze proporzionali ad esse corde, che rappresentano gli spazj; così gli archi cicloidali *TZ*, *nZ*, ec.

che sono doppj delle corde OZ, aZ, ec., si descrivono per forze accelerative ad essi archi proporzionali, che rappresentano pure gli spazj da percorrersi, o sia descrivonsi in tempi eguali. Ora perchè dai gravi (nell'ipotesi della gravità che opera in una maniera costante nelle direzioni paralelle e nel vôto) si trascorrono in egual tempo tutti gli archi, qualunque essi sieno, di una cicloide, ha preso questa curva il nome di *tautocrona*, o sia del medesimo tempo.

Esperimento IV.

Se due corpi cadono dalla quiete nello stesso istante, uno descrivendo la semicicloide FA (*fig.* 9), l'altro discendendo per la linea retta EC che unisce l'estremità della cicloide inversa, il corpo che descrive la curva arriva al punto più basso prima di quello che discende lungo la retta.

Esperimento V.

Se tre corpi b, c, x cadono dalla quiete nello stesso istante, l'uno descrivendo l'arco circolare OB (*fig.* 9), l'altro percorrendo la corda EC corrispondente a questo arco, e il terzo discendendo lungo l'arco cicloidale FA, che ha gli stessi estremi della corda e dell'arco circolare; il corpo che descrive la cicloide arriva al punto infimo prima di quello che cade per l'arco circolare, e questo prima di quello che discende lungo la retta.

48. Si ricava da questi esperimenti che la cicloide sia la linea della più veloce discesa, o, come dicesi, *brachistocrona;* il che importa che un corpo cadendo per questa curva impiega il tempo che si può minore per giungere da una estremità all'altra. Così il tempo per FA è minore di quello che s'impiega per l'arco OB, o per la retta EC, ch'è corda di questo arco. La ragione di questo apparente paradosso è riposta nella diversa energia della gravità, la quale è maggiore nella caduta per la cicloide, che per l'arco e per la corda; perciocchè la cicloide inversa FA si avvicina più alla verticale, che non fa l'arco o la corda. Per altro chiunque si persuade ch'essendo la cicloide tautocrona, debba

essere brachistocrona: e come non recherebbe maraviglia se il corpo partendosi da R sulla cicloide giungesse più presto in A, che non farebbe movendosi per tutto l'arco o per tutta la corda; così del pari non è da prendere ammirazione se giunge più presto movendosi per tutta FA (V. Poisson, T. I, num. 280; e Francoeur, *Tratt. di Mecc.*, num. 198). Trovandosi del pari più energica la forza di gravità nell'arco OB che nella corda EC, è da affermarsi in secondo luogo che *la caduta dei corpi per un arco circolare e per la sua corda non è isocrona o in egual tempo, ma che i corpi scendono più presto per l'arco circolare, che per la corda corrispondente.*

49. Chiunque conosce le cose geometriche, sa che ove si applica un filo dilicato e pieghevole, ma incapace di estensione, alla curva Xp (*fig.* 10), questo filo sviluppandosi lentamente da pX descrive colla sua estremità un'altra curva $pTnZ$, che dicesi descritta per isviluppamento. La curva pX, da cui si svolge il filo, si chiama l'*evoluta* della curva $pTnZ$; il filo che si sviluppa è continuamente perpendicolare al piccolo arco della curva che si descrive nel medesimo tempo, cioè in T, in n, e Z; la lunghezza di questo filo o di questo raggio si appella il *raggio della evoluta*, o *raggio osculatore*, o pure *raggio di curvatura*, il quale va crescendo, come si va svolgendo, finchè giunga al *maximum* in XZ. E come il raggio osculatore è perpendicolare al punto della curva che descrive colla sua estremità; così questo pezzetto infinitamente piccolo della curva descritta per isviluppamento si può riguardare come un archetto circolare descritto con un raggio eguale alla lunghezza del raggio dell'evoluta o del raggio osculatore. Ora se l'evoluta pX è una cicloide, la curva descritta per isviluppamento o sia $pTnZ$ è parimente una cicloide; il massimo raggio osculatore XZ è doppio di rZ, o sia del diametro del circolo generatore della cicloide $pTnZ$ (num. 46); e l'archetto cicloidale in Z si confonde con un archetto circolare descritto col raggio eguale a XZ. Ciò posto, se un corpo cade per un piccolo arco circolare che ha per raggio il doppio diametro del circolo generatore della cicloide, vale lo stesso come se cadesse per un piccolo arco cicloidale al punto infimo Z; perciocchè in questo punto l'archetto cicloidale si confonde e coincide coll'archetto circolare. E però potendosi riguardare due

archetti circolari minimi ed ineguali come due archetti cicloidali, ne risulta (num. 47) che *un corpo discende lungo questi due archetti circolari minimi ed ineguali in tempi eguali.*

50. E similmente potendosi considerare ogni piccolo arco di una curva qualunque come un arco cicloidale, o come un arco di cerchio, ne segue che un corpo scende per piccoli archi ineguali di una curva qualunque in tempi eguali. Ma è da notarsi che allora i tempi della caduta di un corpo per archi circolari ineguali, o pure per archi di una curva qualunque, sono eguali, quando gli archetti circolari o di una curva qualunque sono molto piccoli, o, come diconsi, minimi; perciocchè in questo solo caso si confondono cogli archetti cicloidali, e perciò in questo solo caso sono sensibilmente tautocroni.

Dalle cose da noi esposte risulta che la caduta dei corpi per li piani inclinati e per curve diverse, e più di ogni altro per archi cicloidali e circolari, è un caso particolare della caduta verticale, e da questa non si differisce che nella diversa quantità della forza acceleratìva della gravità. Dopo di che siamo abilitati a valutare con più esattezza il movimento dei corpi che dondolano e che si dicono *penduli*, come meglio si vedrà nel seguente capitolo.

CAPO III.

DELLA GRAVITÀ CONSIDERATA NEL MOVIMENTO DEI PENDULI.

Esperimento I.

51. Se il corpo P legato ad un filo di seta o di aloe, e fisso nel punto X (*fig.* 11), si mette a dondolare, andrà da P in Z, e da Z in Q, e poi da Q ritornerà in Z, e da Z in P, e così successivamente proseguirà ad andare e venire, finchè lo strofinio del filo in X e la resistenza che incontra P nell'aria non vadano dolcemente estinguendo il suo movimento.

Il punto X, in cui è sospeso il filo, si chiama *centro di sospensione* o *di moto*; il filo di seta si considera come una linea retta senza massa, ed incapace di estensione; il corpo P si riguarda come un punto materiale; e questo punto materiale sospeso all'estremità di una retta

senza massa, e fisso all'altra sua estremità, si chiama *pendulo semplice*. L'andare poi e venire da P in Q si dice *oscillare*, lo scendere da P in Z forma una mezza oscillazione o vibrazione, e lo scendere da P in Z e poi salire da Z in Q forma un'oscillazione o vibrazione intera. Finalmente quando il pendulo da P va in Q, e poi da Q ritorna in tempo eguale in P, e così successivamente compie le sue oscillazioni in tempi eguali, il pendulo porta il nome d' *isocrono*.

52. Il pendulo XZ allontanandosi dalla verticale XZ, e mettendosi nella posizione XP, tende a ritornare in Z in virtù della gravità che lo spinge verso il punto più basso Z. Ma la forza accelerativa che lo porta verso Z non è la forza assoluta, ma relativa della gravità; perciocchè il pendulo scende per un arco il cui raggio è eguale alla lunghezza XZ, o sia scende per un piano inclinato (num. 44).

E per meglio comprender ciò, si riguardi la *fig.* 8, in cui il pendulo AB portato fuori della verticale AF è situato in B, come se fosse sopra il piano inclinato BC, o sia sulla tangente di B (*). Ora se il punto materiale B fosse collocato sul piano, una parte della sua gravità sarebbe distrutta dal piano, e nel pendulo AB è distrutta dal filo; di modo che la forza residua e relativa della gravità è quella che è scomposta giusta la lunghezza del piano BC. E come i triangoli CDB, BDA sono simili; così l'angolo d'inclinazione del piano CBD è eguale a quello di oscillazione DAB, che risulta dall'inclinazione del filo AB colla verticale AD. La posizione adunque del punto materiale B è in tutto eguale e simile a quella sopra un piano inclinato, e il movimento del pendulo o sia di B avrà luogo nello stesso modo e a norma delle stesse leggi secondo le quali avviene la caduta dei corpi per li piani inclinati, siccome è stato già da noi affermato (num. 44). Nasce da ciò che il punto B scende per l'arco BF (*fig.* 8), e il pendulo XP descrive l'arco PZ (*fig.* 11) con moto uniformemente ac-

(*) Il corpo del pendulo è situato in B come se fosse sul piano inclinato BF formato dalla corda dell'arco che descrive il pendulo stesso, e discende tanto per l'arco che per questo piano dall'altezza DF; mentre se si paragonasse alla discesa pel piano inclinato BC, il corpo percorrendo questo piano dovrebbe abbassarsi dell'altezza DC maggiore di DF. (*Nota degli Editori*)

celerato (*). Giunti che sono al punto più basso F e Z colla velocità finale acquistata nel discendere per l'arco BF e PZ, sono atti a salire con moto uniformemente ritardato ad un'altezza eguale (num. 44), o sia per un arco eguale, e similmente posto FE e ZQ nel medesimo tempo in cui caddero da BF e PZ. Dai punti E e Q ritornano in virtù della forza relativa accelerativa in F e Z, e colle velocità acquistate salgono di nuovo sino a B e P in tempi eguali; e così successivamente cadendo e risalendo, il loro dondolare sarebbe perpetuo se lo strofinio e la resistenza dell'aria non andasse scemando la loro velocità, e non ispegnesse il loro movimento mettendo i due penduli AB, XP nella situazione della verticale AF e XZ, in cui sono in equilibrio e restano in quiete.

53. Ora sebbene il movimento del pendulo AB (*fig.* 8), considerato in una intera oscillazione da B in E, sia accelerato nella prima mezza oscillazione da B in F, e ritardato nell'altra mezza oscillazione da F in E; pure in più oscillazioni, o in quanto all'effetto totale che risulta da più oscillazioni, può riguardarsi come uniforme. Imperocchè supponendo che ogni oscillazione si perfezioni in $1''$ di tempo, e che l'estensione di ciascuna oscillazione da B in E sia di 4 pollici, è manifesto che in dieci oscillazioni o sia in $10''$ l'effetto totale del pendulo sarà quello ch'esso col muoversi ha descritto 40 pollici in $10''$. E siccome lo spazio trascorso dal pendulo in ciascuna oscillazione è sempre lo stesso, ed eguale a $4^{\text{poll.}}$; così l'effetto totale o sia lo spazio di $40^{\text{poll.}}$ percorso dal pendulo in $10''$ si potrà comparare ad uno

(*) La gravità relativa che fa discendere il pendulo per l'arco BF è una forza continuata variabile, per cui il moto risulta bensì accelerato, ma non uniformemente. Infatti esprimendo colla verticale Bo la gravità assoluta, che diremo g, si risolva questa forza in due, una Bm nella direzione del filo AB, e l'altra Bn perpendicolare al medesimo: si scorge tosto che la Bm viene elisa dalla resistenza del filo, e la Bn è la gravità relativa per cui si muove il pendulo. Ora dal triangolo rettangolo Bmo si ricava $mo = Bo \times \text{sen.} mBo$; cosicchè essendo l'angolo mBo eguale a quello BAD d'una semi-oscillazione, il quale chiameremo a, ed essendo $mo = Bn$ eguale alla gravità relativa che diremo x, si ha $x = g . \text{sen.} a$. E siccome al discendere nelle oscillazioni del corpo B, l'angolo a varia ad ogni istante; così la gravità relativa per cui il pendulo vien posto in movimento è una forza variabile, ed il moto che ne risulta non accelerato uniformemente. (*Nota degli Editori*)

spazio eguale di 40poll. descritto parimente nel tempo di 10″ con una celerità uniforme di 4poll. in 1″. Il movimento adunque del pendulo comechè sia alternativamente accelerato e ritardato, può non di meno esser tenuto per uniforme, e come tale è atto a misurare il tempo che si estima (T. I, num. 29) per mezzo di sì fatto moto. Per lo che la ricerca più importante da instituirsi è quella di conoscere il tempo o la durata delle oscillazione del pendulo.

54. Sia adunque BF (*fig.* 8) un arco minimo circolare che descrive il pendulo AB in un una mezza oscillazione, $DF = x$ l'altezza verticale corrispondente all'arco BF e $AF = a$ la lunghezza del pendulo, ch'è il raggio del circolo cui appartiene l'arco BF, e si tenga il rapporto della circonferenza al diametro come n sta 1. Si tratta adunque di determinare il tempo t che impiega il pendulo AB a descrivere l'arco minimo BF, o sia la durata di una mezza oscillazione.

Dall'equazione $g = \frac{v^2}{2s}$ (num. 16) si ricava $v = \sqrt{2gs}$; e come la velocità per l'arco BF è eguale (num. 39) a quella per l'altezza x, così $v = \sqrt{2gx}$. E perchè si abbia l'espressione del tempo, è da ricordarsi (num. 21) che la velocità è eguale all'elemento dello spazio diviso per quello del tempo; o sia chiamando ds l'elemento dello spazio, e dt quello del tempo, si ha $v = \frac{ds}{dt}$, e perciò $dt = \frac{ds}{v}$, o sia sostituendo il valore di v già ricavato $dt = \frac{ds}{\sqrt{2gx}}$. Conosciuto il valore dell'elemento dt del tempo nel percorrere un elemento ds dell'arco BF, è ora da prendersi la somma di tutti gli elementi dt di tempo che impiegansi nel percorrere la somma di tutti gli elementi ds di spazio, o sia il tempo finito t che impiega AB a descrivere BF. L'algebra sublime ci presta questa somma per mezzo di una serie, ed essa c'insegna che nel caso di un arco minimo, com'è BF, la somma degli elementi del tempo o sia $t = \frac{n}{4}\sqrt{\frac{a}{g}}$. La durata adunque di una mezza oscillazione da B in F è eguale ad un quarto della circonferenza moltiplicato per la radice di un rotto, di cui il numeratore è il raggio

o la lunghezza del pendulo, e il denominatore la forza accelerativa della gravità. Indi è che la durata di una oscillazione intera da B in $E = \frac{n}{2} \sqrt{\frac{a}{g}}$. E facendo $\frac{n}{2} = \pi$, sarà $T = \pi . \sqrt{\frac{a}{g}}$ (V. Poisson, T. I, num. 270).

Conosciuto il tempo, se ne possono dedurre le proprietà dei penduli, e tant'altri conseguenti che sono di gran momento per le cose fisiche.

Esperimento II.

Se due penduli sono eguali in lunghezza, si osserva ch'essi descrivono i piccoli archi circolari che sono meno di 4° o 5° a un di presso nel medesimo tempo, qualunque sia la proporzione de' piccoli archi.

55. Siccome i piccoli archi circolari si possono considerare (num. 49) come archetti cicloidali; così avviene che le oscillazioni dei penduli in archi minimi circolari sieno sensibilmente isocrone. Ma senza di questo l'equazione $T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$, che ha luogo negli archi minimi circolari, ci annunzia chiaramente che la durata delle oscillazioni in tal caso è indipendente dalla loro ampiezza. Oltre di che il calcolo c' insegna che la differenza tra due penduli che compiono un' oscillazione in 1″, dei quali l' uno oscilla in un arco infinitamente piccolo e l'altro in un arco di 5°, è di 41″,1 in 24 ore, o sia in 86400″. E se gli archi descritti dall' una e dall' altra parte della verticale, in luogo di supporsi di 5°, non fossero che di 1°, il ritardo non avverrebbe che di 1″,64 in 24 ore, e per un arco di 1/2 grado non sarebbe che 0″,41. L'esperienza poi ci attesta che due penduli di eguale lunghezza, dei quali l' uno oscilla in un arco assai piccolo, e l'altro in un arco poco più di 1°, non differiscono d' un' intera oscillazione in 29000. Pare adunque tanto dagli esperimenti quanto dal calcolo, che sia ben fondato l' isocronismo dei penduli egualmente lunghi che oscillano in archi minimi circolari, sebbene, parlando rigorosamente e con esattezza, debba aver luogo negli archi cicloidali e non nei circolari.

56. Nè la resistenza dell' aria ha una influenza sensibile sulla durata delle piccole oscillazioni. Poichè si di-

mostra per via del calcolo che la resistenza dell' aria aumenta di tanto il tempo della mezza oscillazione discendente, di quanto diminuisce quello della mezza oscillazione ascendente; di modo che la durata della oscillazione intera resta la stessa, come se avesse luogo nel vôto (V. Poisson, T. I, num. 273). L' aria diminuisce solamente l'ampiezza delle oscillazioni; perciocchè quando il pendulo dopo aver disceso rimonta, fa colla verticale un angolo più piccolo di quello che avea fatto discendendo a cagione della resistenza dell' aria; ma sebbene l' ampiezze fossero ineguali, pure il tempo delle intere oscillazioni, sieno più o meno piccole, è sempre eguale, perchè T è indipendente dalle ampiezze negli archi minimi circolari.

Esperimento III.

Se le lunghezze di due penduli sono come 4 sta 1, si osserva che i tempi delle loro vibrazioni nei piccoli archi circolari sono come 2 sta 1.

57. Questo esperimento ci avverte che i tempi delle oscillazioni in archi picciolì circolari sono proporzionali alle radici delle lunghezze de' penduli; perciocchè le lunghezze 4 e 1 ci somministrano i tempi 2 e 1, che sono le radici di 4 e 1. E come noi abbiamo dimostrato (num. 45) che i tempi pei corpi i quali discendono per archi simili sono nella ragione delle radici degli archi, e perciò come le radici de' raggi; così le lunghezze dei penduli rappresentando i raggi dei circoli, di cui essi descrivono gli archi, è da conchiudersi col favore dell'esperimento e della geometria che i tempi delle oscillazioni dei penduli sono in ragione della lunghezza di essi penduli, o più precisamente come le radici della lunghezza dei penduli. Per altro l'equazione $T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$ ci dimostra chiaramente che in un medesimo luogo in cui la gravità è costante il tempo T non può variare che nella ragione della radice a, o sia della lunghezza del pendulo.

58. Si comprende da ciò in che modo si può ritrovare la lunghezza da darsi ad un pendulo perchè batta e segni i secondi. Poichè se nel tempo t un pendulo fa N oscillazioni, la durata di una $T = \frac{t}{N} = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$, e però

la lunghezza del pendulo $a = \frac{g}{\pi^2} \times \frac{t^2}{N^2}$. Se dunque un altro pendulo di lunghezza a' compisse nel medesimo tempo N' oscillazioni, ne verrebbe $a'N'^2 = aN^2$. Per lo che la lunghezza di due penduli sono tra loro nella ragione inversa dei quadrati del numero delle oscillazioni perfezionate nel medesimo tempo. Dopo di che per determinare la lunghezza a del pendulo che deve battere i secondi, basta di pigliarne un altro di una lunghezza qualunqne a', e contandone il numero N' delle oscillazioni che eseguisce in un tempo noto t, si trova immantinente la lunghezza da darsi al pendulo per battere i secondi. Così sia il tempo t un minuto, la lunghezza $a' = 0^m,797$, le cui vibrazioni in un minuto sieno $N' = 67$, si viene immantinente a conoscere la lunghezza del pendulo a secondi, perchè si conosce il numero $N = 60$ oscillazioni che questo pendulo dovrebbe compiere in un minuto, dicendo $a = 0^m,797 \times \frac{67^2}{60^2}$. Nella stessa guisa si potrebbe correggere la lunghezza di un pendulo che dovrebbe battere i secondi, e non li batte per cagione del caldo o del freddo che ne ha allungato o accorciato la lunghezza.

Esperimento IV.

Se due penduli sono eguali in lunghezza, si osserva che nello stesso luogo della superficie della terra descrivono archi eguali e oscillano in egual tempo, qualunque sia la proporzione dei loro pesi.

59. Questo esperimento conferma ciò che noi abbiamo stabilito nel num. 18 del T. I: cioè a dire che la gravità non dipende nè dalla materia nè dalla forma dei corpi, ma che tende ad imprimer loro in tempi eguali velocità eguali, o sia delle forze proporzionali alle loro masse; perciocchè masse ineguali non potrebbero descrivere archi o spazj eguali, se la forza che anima la massa più pesante non fosse proporzionalmente più grande di quella che sospinge la massa meno pesante. Posti adunque penduli di eguale lunghezza, il loro vario peso non potrà in alcun modo influire nè alterare il loro isocronismo nel medesimo luogo della terra.

60. Esposte le leggi cui i penduli obbediscono oscillando, è qui da avvertire ch'esse han luogo sia che cre-

sca o diminuisca la forza della gravità. Poichè questa è capace di alterare la durata di ciascuna oscillazione colla sua energia che cresce o vien meno, ma non può turbare il rapporto d' isocronismo che hanno tra loro le piccole oscillazioni, e quello che hanno queste oscillazioni co' pesi e colle lunghezze dei penduli. Di fatto dati due penduli della medesima lunghezza, sarà $t : t' :: \sqrt{g'} : \sqrt{g}$, ossia *i tempi delle loro oscillazioni sono in ragione inversa delle radici delle forze impresse dalla gravità.* Ma posta eguale la forza g, sempre egli è vero che le durate delle oscillazioni saranno in penduli di lunghezza diversa, come le radici delle loro rispettive lunghezze.

61. Chiunque ora si accorge che per mezzo dei penduli si può misurare l'intensità della gravità, che si riduce allo spazio (num. 15), che indica ed esprime la velocità di un corpo dopo la sua caduta verticale in 1''. Poichè dalla formula $T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$ si ha il valore di $g = \frac{\pi^2 a}{T^2}$; cioè a dire l'intensità assoluta della gravità è eguale al quadrato del rapporto prossimo della circonferenza al diametro multiplicato per la lunghezza del pendulo, e diviso pel quadrato del tempo di un'oscillazione. In virtù di questo metodo e coll'ajuto di esperienze esatte e diligentissime rinvenne Borda il primo nel 1790 per l'osservatorio di Parigi la forza della gravità di $9^{m},8088$, ossia che un corpo nel primo 1'' della sua caduta verticale percorre nel vôto $4^{m},9044$. Biot, Bouvard e Mathieu hanno ripetuto le medesime esperienze nel 1808, ed Arago con Humboldt le han verificate con altri argomenti nel 1818. Ma tutti questi scienziati hanno colla loro diligenza confermato la determinazione del Borda.

62. Si può nella stessa guisa ricercare l'intensità della gravità in diversi punti della terra, e conoscere in che modo essa varia; perciocchè dato lo stesso pendulo, le intensità della gravità in due luoghi differenti stanno nella ragione inversa dei quadrati dei tempi di una oscillazione (num. 61). Allora conosciuta la durata della oscillazione, e la forza della gravità in un luogo, p. e. Parigi, si cerca la durata della oscillazione, p. e. in Palermo, per via dell'osservazione, e si viene subito a ritrovare la forza

della gravità in Palermo. Con sì fatto metodo Biot l'ha determinata sopra molti punti del meridiano di Parigi in una estensione di quasi 550 leghe dalle Isole Baleari sulla costa di Spagna sino alle Isole Shetland le più settentrionali delle Orcadi, e nel 1825 in varj luoghi di Sicilia e d'Italia. Altri osservatori parimente si sono rivolti a misurare le variazioni della forza di gravità in altri luoghi della terra. Il capitan Kater nel 1817-18 in Iscozia e Inghilterra; il capitano Freycinet in un viaggio attorno al mondo dal 1817 al 20; il capitano Duperrey in un simile viaggio dal 1822 al 1824, e 'l capitano Sabine dal 1821 al 1824 in diversi viaggi in Affrica e in America dall'equatore sino alla lat. 79°.

63. Ma tutte queste ricerche e osservazioni sono fondate sulle proprietà del pendulo semplice, che non ha esistenza ed è un essere puramente matematico; perciocchè sebbene un filo per la sua squisita delicatezza si potrebbe considerare come una linea, pure non si potrà mai concepire che il peso attaccato all'estremità di questo filo sia un punto sfornito interamente di estensione. Di ordinario i penduli sono formati da uno o più pesi legati ad un filo metallico a differenti distanze dal punto di sospensione. E questi penduli diconsi *composti*, come quelli che risultano da molti semplici, o sia da più punti pesanti situati a distanze differenti dal centro di sospensione, e sospesi ad un filo inflessibile. Ora la prima ricerca da farsi nei penduli composti si è quella d'investigare la legge o la durata delle loro vibrazioni, o sia, in altri termini, la loro lunghezza, la quale nei semplici si misura dalla distanza tra il peso e il punto di sospensione; ma nei composti, in cui i pesi sono più e collocati a varie distanze dal punto di sospensione, è da ricercarsi in qual modo e con quale artifizio si possa definire e apprezzare.

Ma per procedere con metodo si attenda al pendulo composto FBA (*fig.* 12), in cui FA si considera come un filo inflessibile e senza massa, al quale sono legati a diverse distanze dal punto F i due pesi B e A. È certo che A e B nel primo istante infinitamente piccolo della loro caduta discenderebbero in virtù della gravità egualmente, e sospinti sarebbero dalla medesima velocità; di modo che le rispettive ed eguali velocità di B e di A potrebbero rappresentarsi per le rette paralelle ed eguali Ba, Am. Ma siccome il filo è incapace di piegarsi, e mo-

vendosi infinitamente poco dalla posizione *FA* in quella di *Fc* obbliga i pesi *A* e *B* a descrivere nel medesimo tempo archi ineguali e proporzionali alle distanze rispettive di *A* e *B* dal punto di sospensione *F*; così ne dee necessariamente avvenire tra *A* e *B* una specie di compensamento o di ripartizione dei loro moti; o sia che *B*, come quello ch'è situato più vicino al punto di sospensione *F*, accelererà le vibrazioni di *A*, e questo al contrario ritarderà le oscillazioni di *B*. E però il moto di *B* e di *A* differisce da quello che ciascuno di essi avrebbe se oscillasse solo intorno ad *F*; perchè la celerità di *A* è accresciuta, e quella di *B* è ritardata. E siccome la celerità dallo stato di rallentamento va passando da *B* gradatamente in quello di aumento in *A*; così è da trovarsi un punto intermedio tra *B* e *A* in cui essa non è nè rallentata nè accresciuta, come è giusto la celerità del punto *C*, che nel passaggio del pendulo da *FA* in *Fc* trascorre *Cb* paralella ed eguale a *Ba* e ad *Am*. Se dunque un corpo fosse collocato nel punto *C*, il suo moto non sarebbe nè accelerato nè ritardato dai pesi *B* e *A*, ma sarebbe quello stesso che egli avrebbe avuto se fosse stato solo sospeso al filo *FA*. Per una sì fatta proprietà il punto *C* dicesi centro di oscillazione del pendulo composto *FA*, e in generale in qualunque pendulo composto si chiama *centro di oscillazione* quel punto la cui celerità non è nè aumentata nè ritardata per l'unione che lo lega a tutti gli altri punti pesanti.

64. Si vede da ciò che il peso *B*, sebbene sia più vicino ad *F*, pure compie le sue oscillazioni, come se fosse situato in *C*, perchè la sua celerità è ritardata; e il peso *A*, non ostante che sia più lontano da *F* che non è *C*, pure eseguisce le sue oscillazioni, come se fosse collocato in *C*, perchè la sua celerità è accresciuta. Tutti i pesi in somma in un pendulo composto ancorchè sospesi fossero a distanze ineguali, pure tutti fanno le loro oscillazioni, come se riuniti stessero nel centro *C* di oscillazione. E perciò un pendulo composto qualunque si può e deesi riguardare come un pendulo semplice, la cui lunghezza si misura per la distanza tra il punto di sospensione e il centro di oscillazione.

65. Dato adunque il centro di oscillazione, si conosce subito la lunghezza del pendulo composto e la durata delle sue vibrazioni; per mezzo del centro di oscillazione

il pendulo semplice, che è un essere ideale, si trasforma e si porta ad un essere reale nei penduli composti, e tutte le proprietà del pendulo semplice si possono attribuire al composto: il problema in somma da noi annunziato e tutta la dottrina dei penduli composti ad altro non si riduce che a trovare il centro di oscillazione, o, come da altri si esprime, a ritrovare un pendulo semplice che compie le sue oscillazioni nel medesimo tempo in cui le batte un pendulo composto.

66. Tra i metodi adoperati per ritrovare il centro di oscillazione, il più semplice è quello di Giacomo Bernoulli, che l'ha ricavato dai principj della statica, e che al presente può riguardarsi come un'applicazione immediata del famoso principio di d'Alembert da noi esposto nel tomo I (num. 230). La celerità con cui tende a muoversi nel primo istante il peso B, ch'è stata rappresentata da Ba, si può esprimere $Bp + pa$, e quella da cui è sospinto A, la quale è stata indicata da Am, può notarsi per $Ac - cm$. Di queste due celerità Bp e Ac sono quelle che restano dopo la mutua azione dei pesi, perchè $+ pa - cm$ si distruggono per la loro mutua azione; e queste celerità distrutte son tali, che il pendulo composto FA sarebbe restato in riposo se fosse stato animato da esse sole. Seguirebbe da ciò che $pa \times B - cm \times A = 0$; ma siccome queste due forze operano per mezzo di una leva a braccia diritte (num. 97 del T. I), segue che $pa \times B \times BF - cm \times A \times AF = 0$. Alle due quantità pa e cm si possono sostituire AC e CB; perchè a cagione della somiglianza dei triangoli cbm, abp si ha $cm : ap :: mb : ab :: AC : CB$, e l'equazione già ritrovata si può esprimere $CB \times B \times BF - AC \times A \times AF = 0$. Introdotto con questo artifizio il centro di oscillazione C nella equazione, non resta che a render generale il caso particolare da noi esaminato e supposto. A ciò fare si chiami x la distanza tra il centro di sospensione, e quello di oscillazione come incognita, BF, AF, b, a come note, $CB = x - b$, e $AC = a - x$, e tradotta l'equazione in questa espressione sarà $(x - b) Bb = (a - x) Aa$, donde si ricava $x = \frac{Aa^2 + Bb^2}{Aa + Bb}$. *Il centro* adunque *di oscillazione*, o sia *la distanza tra i centri di sospensione e di oscillazione è eguale alla somma dei prodotti di ciascun peso pel quadrato della sua ri-*

spettiva distanza dal centro di sospensione, divisa tutta per la somma dei prodotti di ciascun peso per la sua distanza dal medesimo centro di sospensione.

67. È chiaro dalla formula, la quale stabilisce il centro di oscillazione, che questo centro non coincide con quello di gravità, ed è più basso; perciocchè la formula che determina il centro di gravità (tom. I, num. 81) è $\frac{Aa+Bb}{A+B}$. Solamente si dimostra che il centro di oscillazione si confonde con quello di gravità, ove questo è situato ad una distanza infinitamente lontana dal centro di sospensione, perchè allora il centro di oscillazione si troverà parimente ad una distanza infinita dal punto di sospensione. Ma se il centro di gravità si confonde con quello di sospensione, il centro di oscillazione sarà ad una distanza infinita. Poichè prolungandosi AF al di là di F, e considerandosi il peso B come situato nella parte del filo inflessibile prolungata sì che i pesi sieno da parti differenti, ed opposte dal centro di sospensione; allora la distanza tra B e F sarà espressa per $-b$, come quella che si prende in senso contrario alla distanza di A da F, e la distanza tra il centro di gravità e quello di sospensione sarà $\frac{Aa-Bb}{A+B}$. Di modo che se $Aa=Bb$, diventerà l'equazione $\frac{Aa-Bb}{A+B}=o$, o sia il centro di gravità si confonderà con quello di sospensione. Ma in questo caso la distanza tra il centro di sospensione e quello di oscillazione sarà $x=\frac{Aa^2+Bb^2}{Aa-Bb}$, o sia $\frac{Aa^2+Bb^2}{o}$; il che importa che il centro di oscillazione sia ad una distanza infinita da quello di sospensione.

68. Ora non potendosi da noi mettere in opera che i penduli composti, a chiunque è palese che per determinare l'intensità della gravità coll'ajuto del pendulo, la prima difficoltà che si presenta è quella di stabilire e conoscere la lunghezza del pendulo che si fa oscillare. Borda fu il primo che ci somministrò un metodo esatto per misurarlo, e minutissime e multiplici furono le cure ch'egli pose in opera per definire la lunghezza del suo pendulo che si chiama *assoluto* e batte i secondi (Ved. Francoeur, *Trattato di Meccan. Elem.* num. 265; e Pouillet, *Elemen. di Fis.* cap. 4, num. 53). A Parigi, giusta

le misure del Borda, la lunghezza del pendulo a secondi risultò 993^{mm},8067, e le misure che in seguito si sono prese da altri fisici non sorpassano quella del Borda che di 18 millesimi di millimetro. In Londra, secondo le determinazioni del Kater nel 1818, la lunghezza del pendulo a secondi è 994^{mm},1147.

69. Per determinare poi l'intensità della gravità in diversi luoghi della terra si dovrebbe fare in questi diversi punti ciò che si è fatto in Londra ed in Parigi col pendulo assoluto. Il che riesce assai difficile a praticarsi per l'asprezza dei luoghi e l'imbarazzo dei viaggi. Indi al pendulo assoluto che si suol piantare in un osservatorio per misurarne esatta la lunghezza, si è sostituito il *pendulo invariabile*, ch'è fornito della stessa lunghezza, ma di cui si conta solamente con gran precisione il numero delle oscillazioni che eseguisce in un tempo dato, affinchè ricavar si possa l'energia della forza gravità. Di questo pendulo usarono Kater, Freycinet e Sabine nei loro viaggi (V. *Conoscenza dei tempi per l'an.* 1839, Addiz. p. 83).

TAVOLA

DELLE OSSERVAZIONI DEL PENDULO

STAZIONI	LATITUDINE NORD, O SUD	LUNGHEZZA del pendulo sessagesimale ridotto al livello del mare	NOMI degli OSSERVATORI
Parigi	48° 50′ 14″ N.	mm 993,8493	Borda
Uust	60 45 25 N.	994,9458	Biot
Leith	55 58 37 N.	994,5311	Biot
Dunkerque	51 02 10 N.	994,0802	Biot, Mathieu
Parigi	48 50 14 N.	993,8666	Biot, Bouvard, Mathieu
Clermont	45 46 48 N.	993,5822	Biot, Mathieu
Bordeaux	44 50 26 N.	993,4530	Biot, Mathieu
Figeac	44 36 45 N.	993,4578	Biot, Mathieu
Formentera	38 39 56 N.	992,9760	Biot, Arago, Chaix

STAZIONI	LATITUDINE NORD, O SUD	LUNGHEZZA del pendulo sessagesimale ridotto al livello del mare	NOMI degli OSSERVATORI
Unst	60 45 28 N.	994,9395	
Portsoy	57 40 59 N.	994,6906	
Leith	55 58 41 N.	994,5354	
Clifton	53 27 43 N.	994,3018	Kater
Arbury-Hill	52 12 55 N.	994,2228	
Londra	51 31 08 N.	994,1232	
Shanklin farm	50 37 24 N.	994,0468	
Parigi	48 50 14 N.	993,8666	
Isola Mowi	20 52 07 N.	991,7850	
Isola Guam	13 27 51 N.	991,4520	
Isola Rawak	0 01 34 S.	990,9577	
Isola di Francia	20 09 56 S.	991,7987	
Rio-de-Janeiro	22 55 13 S.	991,6930	Freycinet
Porto Jackson	33 51 34 S.	992,6260	
Capo di Buona Speranza	33 55 15 S.	992,5677	
Isole Malovine	51 35 18 S.	994,0657	
S. Tommaso	0 24 41 N.	991,1094	
Maranham	2 31 43 S.	990,8932	
Isola dell' Ascensione	7 55 48 S.	991,1948	
Serra-Leona	8 29 28 N.	991,0953	
Trinità	10 38 56 N.	991,0609	
Bahia	12 59 21 S.	991,2064	
Giammaica	17 56 07 N.	991,4739	Sabine
Nuova York	40 42 43 N.	993,1682	
Londra	51 31 08 N.	994,1232	
Drontheim	63 26 54 N.	995,0200	
Hammerfest	70 40 05 N.	995,5405	
Greenland	74 32 19 N.	995,7478	
Sitzberg	79 49 58 N.	996,0356	
Parigi	48 50 14 N.	993,8673	
Tolone	43 07 09 N.	993,3858	
Isola dell' Ascensione	07 55 09 S.	991,1824	Duperrey
Isola di Francia	20 09 19 S.	991,7682	
Porto Jackson	33 51 39 S.	992,5879	
Isole Malovine	51 31 44 S.	994,1295	

70. Una delle più belle ed utili applicazioni del pendulo fu quella di adoperarlo, come fece Hugenio il primo, a regolare i movimenti dell'orologio. Una molla o un peso è la forza ch' eccita e mantiene il moto nella ruota *EGF* (*fig.* 13); ma come questa girando non cammina con moto uniforme; così a regolarne le ineguaglianze è diretto l'artifizio del pendulo *Ar* il quale è attaccato all' asse in *A*, e perciò connesso colle due palette *C* e *D* che sono movibili sul medesimo asse, e meglio rappresentate nel basso della figura da *ihl* e da *pon*. Di fatto come il pendulo oscilla da *b* in *q*, un dente della ruota incappa nella paletta *D*; e ritornando il pendulo da *q* in *b*, la paletta *D* è spinta fuori, perchè il dente va piano piano sdrucciolando, e nel medesimo tempo un altro dente va scorrendo e incappando nell' altra paletta *C*. Nella susseguente vibrazione si tira fuori il dente dalla paletta, e un altro se ne insinua nella paletta *D* che già ha ripigliato la sua prima situazione, e così successivamente la ruota gira, e di mano in mano i suoi denti vanno incappando nelle palette *D* e *C*. È chiaro da ciò che il passaggio di ciascun dente è regolato dalle palette, e quello delle palette dalle oscillazioni del pendulo. E come le vibrazioni del pendulo sono isocrone, così di egual durata viene a farsi l'azione delle palette sopra ciascun dente, e perciò in egual tempo succede il giro dei denti. In questo modo avviene che il pendulo regola e modera l'azione delle ruote che ricevono un moto uniforme dal movimento uniforme del pendulo.

71. Hugenio non si ristette a questa invenzione, e pensò di far oscillare il pendulo lungo una cicloide che di sua natura è tautocrona (num. 47). Sospese la verga del pendulo *XZ* (*fig.* 10) a fili sottilissimi di seta, e pose il punto *X* di sospensione della verga all' origine comune delle due cicloidi *XP*, *Xp* situate verticalmente e in senso contrario; di modo che il filo oscillando inviluppa alternativamente una parte di ciascuna di queste cicloidi, e sviluppandosi descrive, pel num. 49, archi cicloidali. In questo modo siano più o meno estese le oscillazioni del pendulo, sempre saranno esse di egual durata. Ma questo meccanismo è stato abbandonato per molte difficoltà che s'incontrano nella pratica; molto più che il pendulo il quale oscilla in archetti circolari si è

trovato più semplice, più facile e di una precisione sufficiente nella pratica (num. 55).

72. Sebbene la ruota *FGE* (*fig.* 13) sia costretta dal pendulo a camminare con uniformità; pure essa fa un piccolo sforzo contro le palette e contro il pendulo; perciocchè da principio il dente della ruota che incappa nella paletta retrocede, e poi reagisce contro la paletta medesima. In virtù di questa reazione la ruota comunica al pendulo quella medesima quantità di moto che perde o per cagione dello strofinio del perno in *A*, o pure per la resistenza dell'aria; e per mezzo di sì fatto moto che acquista, conserva il pendulo la medesima ampiezza alle sue oscillazioni, e può ben regolare l'azione della ruota. Ora questo meccanismo, per cui il pendulo regolatore *Ar* riceve il moto dall'ultima ruota *FGE* per via delle palette *C* e *D*, e poi reagisce sulla ruota medesima per regolare il movimento dell'orologio, si chiama *scappamento*, ed è la parte principale degli orologi, a cui hanno rivolto le loro cure ed il loro studio sopra di ogni altro i più illustri artefici.

73. Tra i varj scappamenti che si sono immaginati finora per gli orologi a pendulo, è da conoscersi quello di Alessandro Cumming. In questo scappamento le palette che sogliono essere di diamante o di altra pietra dura per resistere quanto più si può allo strofinio, portano all'estremità dei loro assi due piccoli pesi (o verghette), i quali sono in tal modo congegnati, che come il dente della ruota scappa, il piccolo peso pendente della paletta cade sul pendulo, e gli comunica sempre la stessa quantità di moto. Coll'artifizio di questo scappamento, che chiamasi *libero*, si è portata una gran perfezione agli orologi, essendosi così emendati i loro principali difetti. Poichè siccome la forza che mantiene in moto il pendulo deriva dal piccolo peso che cade dallo stato di perfetta quiete; così ne avviene che qualunque sieno i difetti delle ruote e la tenacità dell'olio, l'urto sarà sempre lo stesso, e sempre sarà eguale la forza che conserva il movimento del pendulo. Al più le imperfezioni sopra indicate possono influire sulla forza con cui il piccolo peso è rialzato dopo la caduta, ma non possono in alcun modo alterare la forza che risulta dalla sua caduta, perchè il piccolo peso sempre si parte dallo stato di quiete. E però l'invenzione degli scappamenti

liberi è da considerarsi per utilissima, come quella che rende inefficaci e senza alcuno effetto tutte le cause delle imperfezioni degli oriuoli, che derivar possono dal difetto nella costruzione delle ruote e dei rocchetti, dal loro strofinio, e soprattutto dalla tenacità dell'olio che, addensandosi per ragion del freddo, oppone una resistenza all'azione della forza motrice, e la indebolisce.

74. Un'altra causa che turba l'isocronismo dei penduli, è il cangiamento di temperatura; perciocchè dilatandosi l'asta del pendulo nei tempi caldi, e accorciandosi nei freddi, viene a variare la lunghezza dell'asta; ora si accresce e ora si diminuisce la distanza tra il centro di oscillazione e quello di sospensione, e le vibrazioni del pendulo non sono più isocrone (num. 57).

Per portare qualche rimedio a un sì fatto inconveniente si è cercato un legno che senta quanto meno si può l'azione del caldo e del freddo, e gli Inglesi credono che il più opportuno sia il *sapadillo*, di modo che formandosi l'asta del pendulo di questa maniera di legno, venga poco o niente a dilatarsi o a contrarsi la sua lunghezza, e risulta insensibile la variazione dell'isocronismo. Ma alla verità il metodo più adatto a tal uopo si è l'artifizio di congegnare il pendulo di più verghe di due metalli diversi, che si allungano o si accorciano in senso contrario, affinchè la distanza del centro di oscillazione da quello di sospensione, o sia la lunghezza del pendulo composto resti sempre la medesima a qualunque grado di caldo e di freddo, o cangiamento di temperatura.

75. È da sapersi che due verghe, l'una di acciajo e l'altra di ottone, di lunghezza eguale hanno, secondo che ci avverte l'esperienza, col grado medesimo di caldo espansioni ineguali, essendo quella della verga di acciajo all'altra della verga di ottone come 3 sta 5. Poste quindi le lunghezze di due verghe di acciajo e di ottone in ragione inversa della loro espansibilità, ne segue che le loro dilatazioni con un medesimo grado di temperatura sono eguali. Per lo che se le verghe di ottone e di acciajo, che hanno la medesima espansione ad eguale grado di temperatura, si connettono in modo che quelle di acciajo si allungano all'ingiù, e le altre di ottone all'insù, è chiaro che due espansioni eguali e in senso contrario si bilanciano, e che il pendulo costrutto

di tali verghe conserva la stessa lunghezza a qualunque vicenda di temperatura. È questo l'artifizio con che è formato il pendulo (*fig.* 14), in cui le verghe notate colla lettera *s* sono di acciajo, e quelle disegnate colla lettera *b* di ottone, e le une e le altre sono sostenute dalle traverse *c*, *d*, *x*, *f*, *g*, le quali sono di ottone, e nell'espandersi si dilatano lateralmente, e perciò niente influiscono ad allungare il pendulo. Le verghe metalliche dalla prima *s* sino alla media *s*, come si vede, sono cinque, due di ottone e tre di acciajo; e come la lunghezza totale delle due verghe *b* di ottone è 3/5 della lunghezza totale delle tre verghe *s* di acciajo, ne segue che al medesimo grado di calore la dilatazione totale delle tre verghe di acciajo è eguale alla dilatazione totale delle due verghe di ottone; perciocchè l'effetto totale risulta dall'espansione di tutte le parti prese insieme. La prima verga *s* è fissata, come dicesi, *a dimora* nella traversa *c*, e si può allungare verso il basso, per cui fa scendere colla sua dilatazione la traversa *g*. La seconda *s* è fermata in *d*, e allungandosi all'ingiù fa scendere la traversa *f*; finalmente la verga media *s* è appesa in *x*, e si muove liberamente in *f* e in *g*; di modo che le dilatazioni delle verghe di acciajo sono tutte all'ingiù, e tutte son dirette ad allontanare il centro di oscillazione da quello di sospensione. Al contrario la prima verga *b* di ottone è fissata alla traversa *g*, si dilata all'insù, e alza la traversa *d*; la seconda *b* è fermata in *f*, e allungandosi alza la traversa *x*; di modo che le verghe di ottone dilatansi entrambe all'insù, e sono destinate ad avvicinare il centro di oscillazione a quello di sospensione. Ora perchè le dilatazioni delle verghe di acciajo e quelle delle verghe di ottone succedono nel medesimo tempo, sono eguali e fansi in senso contrario; egli è manifesto che si bilanciano, e che il centro di oscillazione quanto si abbassa in virtù dell'espansione delle tre verghe *s*, altrettanto s'innalza per l'espansione delle due verghe *b*, o sia si mantiene nel medesimo punto, per cui non ostanti tutte le vicende di caldo e di freddo il pendulo conserva la stessa lunghezza e resta isocrono.

76. Le altre quattro verghe, due *s* e due *b*, oltre alle cinque già dichiarate, non accrescono l'espansione, ma servono solamente a muovere le traverse da entrambe

l'estremità egualmente, affinchè le verghe che son dirette non si pieghino, e servano parimente a sostenere dall'uno e l'altro lato la verga media *s* che porta un peso che chiamasi *la palla* o *la lente* del pendulo. Quella parte poi della verga media *s* che è sopra la traversa x, e si muove liberamente in d e c, è destinata a mantenere nel medesimo piano le sei verghe interiori colle due verghe *s* esteriori. Son questi gl'ingegni con che suol formarsi oggi il pendulo per renderlo insensibile alle vicende del caldo e del freddo; e le verghe di cui è composto diconsi *a compensamento*, e tutto il pendulo è chiamato dagl'Inglesi *gridiron pendulum*, o sia pendulo a graticola, per la forma che piglia a cagione delle verghe che si connettono.

DELLA DINAMICA

PARTE TERZA

77. Due sono le maniere di movimento di cui finora abbiamo ragionato, il moto cioè uniforme, e il moto uniformemente accelerato. Le forze da cui nascono questi due movimenti, sono l'istantanea, o, come dicesi, d'impulso, e la continua, che noi abbiamo ridotto particolarmente alla gravità. Le forme che rappresentano queste due specie di movimento, sono parimente due: il moto uniforme è espresso (T. I, num. 29) da $s = vt$, e l'uniformemente accelerato dall'equazione (num. 16 e 26) $s = \frac{ft^2}{2}$, o più semplicemente fatto il valore della forza accelerativa $\frac{f}{2} = b$ da $s = bt^2$. Ma come ogni altro movimento risulta dalla composizione di questi due che sono i più semplici, e tutta la dinamica consiste principalmente nella composizione e nello scioglimento di sì fatti due moti; così dopo aver considerato queste due specie di moto ad una ad una, si uniranno ora da noi per darsi perfezione alla meccanica, e stabilire le leggi a norma delle quali si muovono i corpi sospinti e animati nel medesimo tempo dalle due forze d'impulso e di gravità.

78. Il caso più semplice, che ci presenta la natura, della composizione di questi due movimenti è quello dei corpi lanciati verticalmente d'alto in basso, o di giù in su, che sono sospinti dalla forza della mano ch'è istantanea, e dalla gravità che è una forza continua. E come queste due forze operano nel medesimo o in contrario senso, e per la stessa verticale; così ne segue che lo spazio trascorso dal corpo, per la composizione dei due movimenti (num. 27), sarà $s = vt \pm bt^2$. Per lo che questa formola esprime il movimento dei corpi lanciati verticalmente di su in giù, o di basso in alto, e racchiude la legge dei moti accelerati o ritardati nella verticale.

79. Ma se i corpi non sono lanciati per la verticale, o, per dir meglio, se la direzione della forza istantanea forma un angolo qualunque colla verticale, ch'è la direzione della gravità; allora il mobile secondo le leggi del paralellogrammo delle forze (T. I, num. 46) percorrerà la diagonale. Come la forza della gravità o in generale una forza costante qualunque fa variare il moto ad ogn'istante e uniformemente, nel senso della sua direzione o della verticale; perciò succede che il mobile dopo il primo istante non segue la direzione della diagonale cominciata, ma torce per avvicinarsi alla verticale, che è la direzione nel cui senso va esercitando e rinovando la sua energia l'azione della forza continua, o sia della gravità. E così di mano in mano ad ogn'istante per cagione delle due forze, che operano ad angolo, descrive il mobile una diagonale, e tutte le diagonali vanno ad ogn'istante piegandosi e torcendosi, perchè l'azione della gravità va sempre rinnovandosi nel medesimo senso della verticale. E però lo spazio che risulta dalla composizione delle due forze, o dei due movimenti, sarà rappresentato da un poligono d'infiniti lati, o sia sarà un moto curvilineo, che in sostanza ad altro non si riduce che ad un moto rettilineo che va cangiando continuamente direzione. La considerazione adunque dei due movimenti uniforme e uniformemente accelerato, o sia della composizione delle due forze, una istantanea e l'altra continua, porta seco naturalmente la considerazione del moto curvilineo; perciocchè la forza continua, come costante, obbliga il mobile a descrivere una curva. In questo modo la ricerca da farsi nella composizione delle due maniere di movimenti semplici suppone i principj del paralellogrammo delle forze e dell'inerzia, e si risolve in quella del moto curvilineo, ch'è l'ultimo fenomeno del moto (T. I, num. 27) di cui restava a trattare.

È quindi nostro intendimento di esaminare prima le leggi a norma delle quali descrivono una curva i corpi lanciati sulla superficie della terra per una direzione non verticale, e quelle a norma di cui si eseguisce il moto circolare, e finalmente le altre secondo le quali han luogo i movimenti in una curva conica qualunque. Ed in ciò fare non considereremo altre forze che quella d'impulso e di gravità, nè altre curve che le coniche, per-

chè da noi si scelgono solamente dalla dinamica quelle verità e quei teoremi che aprir ci potranno la strada alla spiegazione dei principali fenomeni celesti.

CAPO PRIMO

DEI CORPI LANCIATI IN UNA DIREZIONE NON VERTICALE ALL'ORIZZONTE.

80. Una continua e giornaliera esperienza c' insegna che un sasso o qualunque altro corpo gittato in aria fuori della verticale si va allontanando dalla direzione per cui è stato lanciato, e nel cadere descrive una curva concava verso l' orizzonte. I fisici si sforzano di dimostrare che questa curva sia la parabola per mezzo di una palla di legno che sospiuta da una molla percorre una curva parabolica descritta sopra una tavola verticale, o pure per mezzo dell' acqua che schizzando dal forame di un tubo forma col suo gitto una parabola eguale a quella ch' è segnata parimente sopra una tavola. Ma tutti questi esperimenti sono e non esatti ed incerti, ed appartiene solamente alla geometria determinare quale sia la curva descritta dai corpi lanciati fuori della verticale, non avendo alcun riguardo alla resistenza dell'aria che perturba l'azione delle due forze, quella cioè d' impulso e l' altra di gravità.

Sia dunque il mobile A (*fig.* 15) spinto dalla forza della mano o d' altro impulso per la direzione $ABCD$, percorrendo colla velocità impressa gli eguali spazj AB, BC, CD in tempi o istanti eguali; allora questo mobile animato, com' esso è, dalla gravità, tenderà a scendere per la verticale AH percorrendo, nel primo istante, $AE = 1$; nel secondo istante, $EF = 3$, nel terzo, $FH = 5$, e così di mano in mano. Ciò posto, non ci è dubbio che il mobile A, deviando dalla direzione $ABCD$ per obbedire nel medesimo tempo all' azione della gravità, si troverà in fine del primo istante in I, in fine del secondo in K, in fine del terzo istante in G, ec., descrivendo la curva $AIKG$. In questa costruzione le linee AE, AF, AH sono come i quadrati dei tempi, cioè a dire 1, 4, 9, ec., e le parti EI, FK, HG, ec., sono come i tempi 1, 2, 3, ec. E perchè le linee AE, AF, AH

rappresentano le *ascisse*, e le rette *EI*, *FK*, *HG* le *ordinate* della curva *AIKG*; perciò ne segue che le ascisse sono tra loro come i quadrati delle corrispondenti ordinate, cioè a dire $AE : AF :: EI^2 : FK^2 :: 1 : 4$, ec., proprietà che si appartiene alla *parabola*. E però la curva *AIKG* descritta in virtù di quelle due forze è una parabola.

81. Ora il mobile *A* lanciato dalla forza della mano o di altro impulso si chiama *projetto*; la forza della mano o d' impulso che imprime una velocità costante al projetto, si dice *forza di projezione* o *projettile*; la velocità che ne risulta nel projetto, *velocità di projezione*; la linea *ABCD*, per cui è lanciato il projetto, si distingue col nome di *linea di projezione*; la curva *AIKG* descritta dalla composizione delle due forze, l'una di projezione e l' altra di gravità, porta la denominazione di *trajettoria*; e noi siamo abilitati a conchiudere che la *trajettoria descritta dai projetti sia una parabola.*

82. Riguardando al moto del projetto per la parabola la quale è in un sol piano, egli è chiaro che questo moto si risolve in due moti rettilinei, com'è quello per la linea di projezione *ABCD*, e l'altro per la verticale *AH*; i quali due movimenti sogliono nella geometria esprimere per linee rette che diconsi ascisse ed ordinate. E però la natura della curva che si descrive in virtù dei due movimenti rettilinei, risulta dal rapporto che hanno tra loro questi due movimenti, o sia le due forze, l' una istantanea e l'altra continua, o, come dicesi in geometria, dal rapporto tra le ascisse e le ordinate. In fatti perchè le ascisse nella curva descritta dai projetti sono come i quadrati delle ordinate, si è stabilito che la loro trajettoria sia una parabola, ed ove cangiasse questo rapporto, la curva non sarebbe più una parabola. Ora il mobile *A* non istà che per un sol momento nella direzione *ABCD*, perchè comincia subito a deviare in virtù della gravità; così la linea di projezione è la prima tangente alla parabola *AIKG*. Indi è che la forza projettile piglia pure il nome di *forza tangenziale*, come quella ch' è diretta sempre per la tangente. Di fatto se mentre un mobile descrive la curva cessasse all' istante l' azione delle forze, egli proseguirebbe a muoversi secondo le leggi d' inerzia con moto uniforme per la tangente a quel punto della trajettoria in cui le forze hanno

cessato di operare; giacchè l'elemento della curva, in cui finisce l'azione delle forze, ove si prolunga, è tangente alla trajettoria. La velocità poi con che percorrerebbe questa tangente è eguale allo spazio o arco descritto nell'unità di tempo, ossia $v = \frac{ds}{dt}$ pel num. 54. Finalmente il moto uniforme, che è l'effetto della celerità impressa, continua in linea retta come se fosse solo, e il moto uniformemente accelerato, ch'è l'effetto della gravità, continua pure verticalmente d'alto in basso, come fosse unico nel mobile; di modo che in fine di un tempo qualunque il corpo si troverà nel medesimo punto in cui sarebbe, se questi due moti avessero avuto luogo successivamente, e indipendentemente l'uno dall'altro. Così il mobile A in fine del primo istante si trova in I, come se prima fosse stato spinto per AB, e poi per BI; e in fine di due istanti si trova in K, o sia in quello stesso punto in cui sarebbe stato se prima avesse percorso AC, e poi la verticale CK, ec. Nasce da ciò che il movimento per la parabola si esprime $s = vt + bt^2$, rappresentando vt il moto uniforme per la linea di direzione $ABCD$, e bt^2 il moto uniformemente accelerato per la verticale DG; di modo che la formola $s = vt + bt^2$, che denota il movimento dei projetti nella parabola, ci esprime pure il moto accelerato dei projetti per la verticale (num. 77); e la linea retta descritta dai projetti per la verticale si può riguardare come una parabola che si confonde con sè stessa.

83. Sia ora un punto materiale G lanciato nel vôto per la direzione Gp colla velocità V sotto l'angolo $HGp = a$. Non vi ha dubbio che se la gravità non operasse, il punto materiale percorrerebbe la retta Gp con moto uniforme; ma come in gravità tende ad allontanarlo da questa retta, pel num. 80, descrive una curva ch'è la parabola $GKIA$, e giunto in A discende dall'altra parte descrivendo un altro ramo eguale al primo. In questo caso il punto A di maggiore elevazione si chiama il *vertice della parabola*, la retta AH esprime la più grande elevazione verticale del projetto, l'angolo a della linea di projezione coll'orizzontale GH si dice *angolo di projezione*, e la distanza orizzontale tra l'uno e l'altro ramo della parabola eguale a $2GH$ si chiama *ampiezza del gitto*, perchè misura in una linea retta ed orizzontale la

distanza a cui è stato spinto il projetto. Per dimostrare poi che la curva $GKIA$ sia una parabola, si riferisca la velocità V di projezione ai due assi rettangolari degli x e degli y, l'uno orizzontale lungo GH e l'altro verticale lungo GD (T. I, num. 54). Allora la velocità orizzontale e verticale del mobile nel punto G sarà $V\cos a$ e $V\operatorname{sen} a$ (T. I, num. 52). E però pigliando $GQ = x$ descritto in un tempo t; siccome il mobile descrive x ch'è orizzontale, il suo moto è uniforme, e l'ascissa $x = V\cos a.t$. E parimente l'ordinata corrispondente $QK = Qp - pK = V\operatorname{sen} a.t - gt^2$. Poichè $V\operatorname{sen} a.t$ è la velocità del mobile nell'asse degli y pel tempo t, da cui viene parimente a risultare un moto uniforme. Ma come la gravità opera in senso contrario sul punto materiale, e questo discende in forza della gravità ch'è una forza continua, e genera un moto uniformemente ritardato; così, pel num. 78, $y = V\operatorname{sen} a.t - \frac{gt^2}{2}$. Eliminando adunque dalle due equazioni il tempo t, si avrà $y = x.\operatorname{tang} a - \frac{g}{2V^2\cos^2 a}.x^2$. E sostituendo, pel num. 17, a V^2 la quantità $2gA$, si avrà $y = x.\operatorname{tang} a - \frac{x^2}{4A\cos^2 a}$, ch'è un'equazione della parabola.

84. Ora da questa equazione si ritraggono facilmente le principali proprietà della trajettoria dei projetti nel vôto. E primieramente può far i $y = o$ in due casi, cioè nel punto G (*fig.* 15) in cui l'ordinata y e l'ascissa x sono tutte due eguali a zero; o pure quando x è eguale a tutta l'ampiezza del gitto, o sia $= 2GH$. Nel primo caso l'equazione $y = x\operatorname{tang} a - \frac{x^2}{4A\cos^2 a}$ si annulla, perchè $y = o$, e $x = o$. Ma nel secondo $y = o$, e l'equazione diventa $x\operatorname{tang} a = \frac{x^2}{4A\cos^2 a}$, e risolvendo $\operatorname{tang} a$ in $\frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}$, ne risulta $x = 4A\cos a \operatorname{sen} a$. E perchè $2\cos a \operatorname{sen} a = \operatorname{sen} 2a$, sarà $x = 2A\operatorname{sen} 2a$, cioè a dire l'ampiezza del gitto $= 2A\operatorname{sen} 2a$. Per lo che data la stessa velocità di projezione, ch'è rappresentata dall'altezza dovuta o sia da A, l'ampiezza del gitto è proporzionale al seno doppio di a, o sia è come il seno del doppio angolo di projezione. E siccome il seno massimo è quello di 90°, così

ove $2a = 90°$, o sia $a = 45°$, l'ampiezza del gitto è un *maximum*. Data adunque la velocità di projezione per lanciarsi un projetto alla massima distanza, è da gittarsi sotto un angolo di 45°. Data inoltre la medesima velocità di projezione, si può lanciare un projetto alla medesima distanza sotto due angoli, di cui uno è complemento dell'altro; perciocchè i seni del doppio di questi angoli sono eguali, come supplemento l'uno dell'altro. E così di mano in mano si van ricavando tutte le altre proprietà della trajettoria de' projetti nel vôto. Chi volesse la dichiarazione di sì fatte proprietà tanto nel vôto, quanto nel caso che il projetto incontra la resistenza dell'aria, potrà leggere Poisson, *Meccan.* T. I, § 2, num. 229; e Francoeur, *Tratt. di Meccan.* n. 173 e 175.

85. Se la terra è rappresentata da *ABE* (*fig.* 16), e il projetto è lanciato per la direzione *AF*, questo descriverà la parabola *AGB*; perciocchè la forza di gravità deviando sempre dalla linea di direzione nel senso della verticale, lo farà cadere sulla superficie della terra in *B*, e il corpo della terra gl'impedirà di percorrere la curva *AGBD* come dovrebbe. Ma se il projetto fosse lanciato per l'orizzontale *AL* (*fig.* 17) con una velocità di projezione prima piccola e poi successivamente più grande, prima andrebbe a cadere in *B*, poi in *C*, quindi in *D*. Ma se aumentata sarà notabilmente la forza projettile, in luogo di cadere sulla terra si metterà in giro per la curva *ArfpA*, perchè la forza di gravità non giungerà a vincere la forza di projezione. Il moto adunque di parabolico si può convertire in circolare, ove restando la stessa forza continua, ch'è la gravità, si aumenta notabilmente la forza projettile. Ma in che rapporto deve essere la forza projettile con quella di gravità, e quali sieno le proprietà della trajettoria circolare, si vedranno nel secondo capitolo.

CAPO II.

DEL MOVIMENTO CIRCOLARE.

86. La *fig.* 18 rappresenta il tavolino *K*, su cui innalzasi perpendicolarmente una ruota grande e verticale che gira per mezzo del manico *H*, sotto cui giace un'al-

tra più piccola e verticale. A destra e a sinistra del tavolino stansi posate orizzontalmente due tavole rotonde e perfettamente in equilibrio, sopra una delle quali è collocato un cassettino di legno che porta in mezzo un filo di rame, cui sono infilzate le palle *A* e *B*; e sopra l'altra un altro cassettino in cui stansi inclinati i quattro tubi *bo*, *as*, *dx*, *ct*. Attornia la ruota più grande e verticale una corda, la quale incrocicchiandosi nella ruota più piccola e sottoposta, riesce da due buchi fatti in *F*, e va con i suoi due capi a girare intorno alle due tavole rotonde e orizzontali. In questo modo girandosi il manico *H* si mette in giro la prima ruota, e per cagione della corda, che incrocicchiandosi accerchia le tavole rotonde, si mettono ancora queste in rotazione, e con esse i cassettini soprapposti, e le palle e i tubi e tutti i corpi che contengonsi sopra i cassettini.

Esperimento I.

Si tolga dal filo di rame la palla *B*, e si lasci nel luogo in cui trovasi la palla *A*, e s'introduca acqua o altro fluido nei tubi *as*, *bo*, *dx*, *ct*; allora girando il manico *H* si osserverà che si metteranno in giro i due cassettini; che la palla *A* fuggendo dal centro *C* va a toccare con impeto la parete del cassettino, e che l'acqua, o altro fluido salirà nei tubi inclinati contro la legge della gravità per andarsi a collocare nelle sommità de' tubi.

87. Si ricava da questi esperimenti un fenomeno già conosciuto dalla più alta antichità, cioè a dire che tutti i corpi, o solidi o fluidi che sieno, come si muovono circolarmente fanno uno sforzo per allontanarsi dal centro del loro moto. La palla che scappa, i fluidi che s'innalzano alla sommità dei tubi dimostrano chiaramente lo sforzo che col girare in cerchio esse fanno per allontanarsi dal centro del loro moto. Questo sforzo per altro deriva ed è un conseguente, siccome abbiamo accennato nel num. 82, delle leggi d'inerzia. Un corpo dopo aver trascorso *QP* (*fig.* 19) in luogo di torcere il suo cammino descrivendo *PO*, si sforza di portarsi per la tangente *PE* allontanandosi dal centro *S*. Per essere impedito di far ciò, deve incontrare un ostacolo, ma se giunge a vincere l'ostacolo, continua il suo cam-

mino (T. I, num. 33) sempre per la retta tangente al punto in cui l'ostacolo ha cessato di operare. Per questa ragione la fionda che si gira, scappa per una linea retta tangente al cerchio che descrive; l'acqua contenuta in una secchia non cade quando si mette velocemente in giro, perchè sforzandosi di fuggire pel fondo della secchia vince la gravità, e per questo sforzo le scintille elargano la periferia illuminata nelle ruote dei fuochi lavorati. *Ogni corpo adunque che si muove in cerchio, è animato in ogni punto o istante da una forza che lo sollecita a scappare per la tangente del cerchio.*

88. Ma un corpo qualunque sollecitato di continuo a scappare per la tangente non potrebbe girare in un cerchio senza l'ajuto di un'altra forza che lo mantenesse continuamente nella via circolare, e sempre alla medesima distanza dal centro. Una fionda circola, perchè la mano, che si considera come il centro del cerchio descritto dalla fionda, esercita ad ogn'istante uno sforzo che trattiene la pietra che vuole scappare. Dalla mano, ch'è il centro, si parte la forza, la quale si comunica lungo la direzione della corda; e questa forza arrivando la pietra la ritira continuamente dalla tangente alla circonferenza. In un corpo adunque che circola, oltre allo sforzo ch'esso fa per portarsi lungo la tangente, è da considerarsi un'altra forza continua, la quale partendosi dal centro e tirandolo verso il centro, l'obbliga a descrivere la circonferenza del cerchio. Il corpo Q (*fig.* 19) perchè è sospinto da una forza che si parte da S, ed è rappresentata in direzione e quantità da QG, e insiememente e nel medesimo istante è animato da un'altra forza rappresentata in quantità ed in direzione da QF, descrive in questo istante la diagonale QP. Giunto in P scapperebbe per la tangente PE; ma come è tirato verso S per la forza PH, è costretto a torcere il suo cammino, e a ritirarsi da PE, descrivendo la diagonale PO, e così successivamente. Ora queste due rette, come quelle che sono infinitamente piccole e formano un angolo tra loro, rappresentano un archetto circolare, e il cerchio tutto si descrive nella stessa guisa in virtù di una forza, che operando continuamente si parte dal centro e ritira il mobile dalla tangente nella circonferenza, com'è la forza della mano nella fionda, ec., e in virtù di una forza tangenziale o sia d'impulso, per cui il corpo è

sollecitato in ogn'istante a scappare per la tangente del cerchio che descrive.

89. Ora il cerchio o la curva chiusa QPO, ec. (*fig.* 19) si dice *orbita;* il tempo che impiega il mobile a descriverla, tempo *periodico;* il punto S, *foco;* le rette SQ, SP, ec., guidate dal foco al mobile, *raggi vettori;* lo sforzo che esercita il mobile per allontanarsi dal centro per la tangente, si dice forza *centrifuga*, e la forza che tende continuamente a ravvicinare il corpo dalla circonferenza al centro, o in generale una forza diretta verso un centro, si chiama *forza centripeta* o *centrale.* E però la macchina or ora descritta porta il nome di *macchina delle forze centrali.* Sciolto quindi QP archetto o spazio descritto in un istante nelle sue componenti QF, QG, e compiuto il parallelogrammo $QGPF$, QG rappresenterà la forza centripeta, QF la tangenziale, e PF la centrifuga, come quella che misura lo sforzo ch' esercita il mobile perchè da P si porti in F per camminare lungo la tangente. Per lo che sebbene la forza centrifuga nasca dalla tangenziale, pure il suo effetto non si valuta sulla tangente; ma per la distanza perpendicolare frapposta tra la tangente e l'estremità dell' archetto trascorso dal mobile in un istante, come nella *fig.* 22, si osserva dalla parte della tangente LF, o LD.

90. Considerando inoltre che l' archetto QP è infinitamente piccolo, l' intensità della forza centrale si può riguardare per costante in grandezza e in direzione in un tempo infinitamente piccolo. Così nella *fig.* 20 mentre il mobile percorre l' archetto infinitamente piccolo AD, la forza centrale si reputa paralella al raggio XA, che va all' origine dell' archetto AD. Per lo che se la forza centrale operasse sola sul mobile in questo piccolissimo intervallo di tempo, gli farebbe percorrere una retta eguale ad AF, o sia alla projezione dell' arco AD sopra questo raggio, che in sostanza è eguale al seno verso AF dell'archetto AD. Finalmente è da notare che la forza centrifuga e la centrale operano in senso direttamente contrario, perchè l' una (*fig.* 19) da Q vuol portare il mobile in G, e l' altra da P in F. E come nel circolo ciascun punto dell' orbita è equidistante dal centro; così le due forze debbono essere non che contrarie, ma eguali; giacchè se l'una delle due forze prevalesse sopra l'altra, il mobile ora si avvicinerebbe ed

ora si allontanerebbe dal centro, secondo che la centripeta o la centrifuga sarebbe nel contrasto superiore. Di che meglio in altro luogo.

91. Si può ora conoscere in che modo un mobile in virtù di queste due forze eguali e contrarie descriva un'orbita circolare. Sospinto dalle forze QG, QF descrive l'archetto QP, dove la forza centrale rappresentata da GQ è distrutta dalla centrifuga espressa da PF. Ma come la forza centrale e costante rinnova la sua azione, o sia esercita nel secondo istante un impulso eguale al primo, il quale è rappresentato da $HP = GQ$; e perchè giunto il mobile in P giusta le leggi d'inerzia conserva la sua velocità (num. 87) per $PE = QF$; così il mobile nel secondo istante eguale al primo viene ad essere agitato da due forze che operano di nuovo ad angolo retto, e che sono rappresentate in quantità e direzione da due lati di un paralellogrammo eguale al primo. Indi è che il mobile continuerà a muoversi; che movendosi in istanti eguali trascorrerà le diagonali PO, QP, o sia due archetti eguali; che si rinnoverà una forza centrifuga EO eguale e contraria alla centrale HP, che la distrugge nella stessa guisa che PF avea distrutto QG; e che così di mano in mano nel terzo, nel quarto e nei successivi istanti eguali si avrà movimento circolare, e nel medesimo tempo forza centrale e centrifuga che si distruggono come eguali e contrarie. Ora se in tempi eguali o sia in istanti eguali il mobile descrive archetti o spazj eguali, è ben da conchiudersi che il *movimento circolare sia uniforme*; e se chiamasi v la velocità impressa al mobile, e s l'archetto descritto nel tempo t, si avrà $s = vt$.

92. Essendo eguali le due forze centrale e centrifuga nel moto circolare, basta conoscere il valore dell'una per sapere quello dell'altra. E come ogni forza accelerativa costante (pel num. 25) $= \frac{2s}{t^2}$; così la forza centrale è eguale al doppio del seno verso AF diviso pel quadrato del tempo infinitamente piccolo impiegato a descrivere l'archetto AD (*fig.* 20). Ora il seno verso di un arco infinitamente piccolo è eguale al quadrato di questo arco diviso pel diametro, giacchè in tal caso l'archetto si confonde colla corda AD; e però la forza centrale $= \frac{2AD^2}{2rt^2} = \frac{AD^2}{rt^2}$, o sia al quadrato del rapporto

dell' archetto AD e 'l tempo impiegato a descriverlo, diviso pel raggio XA. E perchè, pel num. 91, questo rapporto $= \frac{s}{t} = v$; perciò la forza centrale risulta $= \frac{v^2}{r}$, o sia *la forza centrale e la forza centrifuga sono eguali al quadrato della velocità diviso pel raggio del cerchio che il mobile descrive.*

93. Facile dopo ciò riesce comparare la forza centrifuga nel cerchio alla gravità, purchè ci piaccia di supporre che la velocità impressa al mobile sia la velocità dovuta ad un' altezza qualunque A (num. 17), di modo che si abbia $v^2 = 2gA$. Poichè allora la forza centrifuga, pel num. 92, sarebbe $= \frac{2gA}{r}$. E però la forza centrifuga $\frac{f}{g} = \frac{2A}{r}$, o sia la forza centrifuga è alla gravità come il doppio dell' altezza, che corrisponde alla velocità del mobile al raggio del circolo che descrive. Se dunque fosse $2A = r$, la forza centrifuga sarebbe eguale alla gravità, ed allora la forza centrifuga tenderebbe il filo di una fionda che gira, come farebbe il peso della pietra, e in generale del mobile sul filo medesimo. Che se fosse $2A$ eguale al raggio terrestre, un corpo potrebbe girare intorno alla terra, siccome abbiamo accennato nel num. 85.

Esperimento II.

Se nel tubo *bo* (*fig.* 18) racchiudesi olio di tartaro e spirito di vino, nel tubo *xd* acqua e mercurio, nel terzo tubo *ct* acqua e pezzetti di sughero, e nel quarto finalmente *as* acqua e palline di piombo; si osserverà che girando la macchina girano i tubi, e l'olio di tartaro nel primo, il mercurio nel secondo, l'acqua nel terzo e le palline nel quarto tubo si andranno a collocare contro l'ordine della loro gravità nelle sommità rispettive dei tubi *b*, *d*, *c*, *a*.

Esperimento III.

Se la palla A, che ha una massa come 2, si lega per un filo di seta alla palla B che ha la massa come 1, e si pongano l'una e l'altra ad eguali distanze dal centro

di moto *C* in *A* e *B*, si vedrà che posta in giuoco la macchina, la palla *A*, come quella che ha una massa doppia, si strascinerà la palla *B*, ed entrambe andranno con impeto a toccare la parete del cassettino.

94. L'olio di tartaro nel secondo esperimento, come più pesante dello spirito di vino, si allontanò dal centro di moto più che lo spirito non fece; nel secondo tubo il mercurio più dell'acqua, nel terzo l'acqua più del sughero, e nel quarto le palline più dell'acqua. Nell'altro esperimento sebbene le palle *A* e *B* fossero animate dalla stessa velocità nel girare, perchè trascorrono eguali circonferenze in tempi eguali; pure la palla *A* come doppia in massa concepì una forza centrifuga più potente di quella della palla *F*, e seco la strascinò. Donde si fa chiaro che, date velocità eguali, la *forza* centrifuga è proporzionale alle *masse* dei corpi. E veramente siccome la forza centrifuga nasce (num. 87) dall'inerzia della materia; così è naturale ch'essa sia in proporzione al numero dei punti materiali da cui risulta un corpo, o sia alla sua massa. Ma di ordinario il mobile è riguardato come un punto materiale, o meglio pel suo centro di gravità.

Esperimento IV.

Se il centro di gravità della palla *A* (*fig.* 18) posa e coincide sul centro di moto *C*, ove si metta in giro la ruota, vien a mettersi in movimento anche il cassettino, ma la palla *A* resta in quiete. O in altro modo: se le due palle *A* e *B* eguali in massa si pongono legate tra loro a distanze eguali dal centro di moto *C*, mettendosi in giro la ruota, resteranno in quiete e ferme in equilibrio. Ma se una di queste due palle si colloca sopra *C*, e l'altra distante da *C* per la lunghezza del filo che le connette, questa col girare si strascina quella. E in generale, se le distanze in cui si collocano le due palle dal centro di moto sono in ragione inversa delle loro masse, staranno col girar della ruota immobili ed in equilibrio; ma se manca un sì fatto rapporto, una palla costantemente è dall'altra strascinata.

95. Quando il centro di gravità della palla *A* coincide col centro di moto, le forze centrifughe dei singoli punti materiali si equilibrano tra loro, perchè tutti i punti materiali si equilibrano intorno al loro centro di gravi-

tà. Lo stesso avviene quando due palle eguali si collocano a distanze eguali dal centro di moto, o in generale quando le palle differenti di massa sono collocate a distanze dal centro di moto reciproche alle loro masse, perchè allora il centro di loro gravità coincide col centro di moto. Ma ove manca questo rapporto, le forze centrifughe risultano ineguali, l'equilibrio si rompe, e una palla si strascina l'altra, ancorchè questa le sia eguale in massa, o pure maggiore; perciocchè il loro centro di gravità è fuori del centro di moto (tomo I, num. 78). Di che si fa chiaro che un corpo non circola intorno ad un altro, ma ambidue circolano intorno al loro comune centro di gravità, il quale riposandosi sul centro di moto resta in quiete mentre i due corpi girano, e girando si equilibrano in virtù delle loro forze centrifughe eguali ed opposte, nello stesso modo che due palle con distanze reciproche alle loro masse circolano intorno al loro centro di gravità, o sia intorno al loro centro di moto, che sono coincidenti.

96. Ma per meglio comprendere la ragione di questi esperimenti, è da attendere che la forza centrifuga $= \frac{v^2}{r}$. E come la velocità è eguale allo spazio o sia alla circonferenza del circolo divisa pel tempo; così chiamando T il tempo, e π il rapporto della circonferenza al diametro, si avrà $V = \frac{2\pi r}{T}$. E però la forza centrifuga $= \frac{4\pi^2 r}{T^2}$, o sia (trascurando la quantità costante) è nella ragion diretta del raggio, e nell'inversa del quadrato del tempo impiegato a descrivere la circonferenza. Posti adunque tempi eguali, le forze centrifughe dei corpi circolanti sono nella sola ragione diretta dei raggi. Per lo che date masse in ragione inversa dei raggi delle circonferenze che descrivono in tempi eguali, sarà $M : m :: r : R$, e le forze si equilibrano, perchè $MR = mr$.

Esperimento V.

Se una delle due tavole, su cui posano i cassettini (*fig.* 18), ha un diametro doppio dell'altra, allora avviene che mentre un cassettino eseguisce due rivoluzioni, l'altro ne compie una. Ora se pongansi due palle eguali

in massa ad eguali distanze dal centro di moto, l' una nel cassettino che perfeziona due rivoluzioni, e l' altra nel cassettino che eseguisce una sola rivoluzione, si vedrà che la prima è capace di elevare un peso collocato nel suo centro di moto quadruplo del peso ch' è capace di elevare la seconda.

97. La velocità della palla che compie due rivoluzioni è doppia di quella che ne fa una, ed i pesi elevati dalle due palle esprimono l' energia delle loro forze centrifughe. E come questi pesi sono 4 e 1, che sono i quadrati delle velocità 2 e 1; così è da conchiudersi che le forze centrifughe delle due palle stanno tra loro come i quadrati delle loro velocità. Di fatto chiamando F, f le forze, V, v le velocità, e posta la circonferenza o i raggi eguali $F : f :: V^2 : v^2$. Anzi risolvendo la velocità negli spazj e nei tempi, e questi essendo tra loro come 1 a 2, egli è manifesto, pel num. 96, che $F : f :: \frac{1}{1^2} : \frac{1}{2^2}$; o sia che le forze centrifughe sono come $2^2 : 1^2$, cioè nella ragione inversa dei quadrati dei tempi.

Esperimento VI.

Restando le rivoluzioni dei due cassettini come nell' esperimento V, cioè a dire che l' uno compie il suo intero circolo in 1″, e l'altro in 2″, ove si pongano due palle di eguale massa, l'una chiamata P nel primo cassettino alla distanza come 2 dal centro di moto, e la seconda p nel secondo cassettino alla distanza come 3 1/6 dal suo rispettivo centro di moto, si vede che P è atta ad innalzare un peso di 10 once nel medesimo tempo che p innalza un peso di 4 once.

98. I tempi delle rivoluzioni sono 1″ e 2″, i cui quadrati sono 1 e 4; i raggi dei circoli descritti da P e p sono 2 e 3 1/6, i cui cubi sono 8 e 32 prossimamente; i quadrati dei tempi 1 e 4 sono proporzionali a 8 e 32, o sia i quadrati dei tempi sono come i cubi dei raggi o delle distanze di P e p dai loro centri rispettivi di moto; e i pesi, come quelli ch' esprimono l' intensità delle forze centrifughe, ci indicano che la forza centrifuga di P è come 10, e la forza centrifuga di p come 4. Ora la forza centrifuga di P è rappresentata da 10, ch' è quadrato di 3 1/6 o sia della distanza di p dal suo

centro di moto; e però si raccoglie dall' esperimento rapportato, che se i quadrati dei tempi che impiegano i corpi a perfezionare le loro rivoluzioni, sono come i cubi delle distanze dai loro rispettivi centri di moto, le forze centrifughe sono proporzionali reciprocamente ai quadrati dei raggi dei circoli descritti, o sia delle distanze dai loro centri.

Il calcolo ci dimostra in un modo più generale questa verità. Imperocchè date masse eguali, pel num. 97, $F : f :: \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$, e ponendo $T^2 : t^2 :: R^3 : r^3$, ne segue $F : f :: r^2 : R^2$. E all' inverso posto che $F : f :: r^2 : R^2$ sarà, per lo stesso num. 97, $r^2 : R^2 :: \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$, o sia $\frac{R^3}{T^2} = \frac{r^3}{t^2}$, e $R^3 t^2 = r^3 T^2$; e però $R^3 : r^3 :: T^2 : t^2$. Si può adunque stabilire come teorema fondamentale, che *posti i quadrati dei tempi periodici come i cubi delle distanze dai centri di moto, le forze centrifughe sono reciprocamente proporzionali ai quadrati delle distanze; e all' inverso poste le forze nella ragione reciproca ai quadrati delle distanze, i quadrati dei tempi sono proporzionali ai cubi dei raggi, o delle distanze dai centri di moto.*

99. Queste dottrine intorno alle forze centrali sono state applicate alla rotazione della terra intorno al proprio asse, e prima di ogni altro si è ritratto che la forza centrifuga è massima all' equatore, e va decrescendo di mano in mano sino al polo, in cui è nulla. Poichè descrivendo i varj punti della terra un circolo massimo nell' equatore e successivamente dei paralelli, il cui raggio va successivamente decrescendo, non vi ha dubbio che la forza centrifuga, la quale è nella ragion diretta dei raggi (num. 96), debba dall'equatore al polo venir meno successivamente. Segue inoltre da ciò, che la gravità, la quale trae la sua origine dall' attrazione della terra sopra i corpi che le sono intorno, vien diminuita dalla forza centrifuga; di modo che la gravità sopra i varj punti della terra risulta meno di quella che sarebbe, se la terra non girasse. E come nell' equatore, per quanto più innanzi si dirà, la forza gravità e la centrifuga sono in senso contrario sulla medesima verticale; così quella risulta eguale all' eccesso dell' attrazione della terra sulla forza centrifuga. Chiamando adunque G

l'attrazione della terra, si ha la gravità $g = G - \frac{4\pi^2 r}{T^2}$; e però nell' equatore $G = g + \frac{4\pi^2 r}{T^2} = 9^m,77980 + 0,0339 = 9^m,8137$. Il rapporto adunque che corre tra la forza centrifuga F e l'attrazione G, $= \frac{0^m,0339}{9^m,8137} = \frac{1}{289}$ o sia $F = \frac{1}{289}G$; e però la forza centrifuga è la 289ma parte della gravità che avrebbe luogo nel caso che la terra non rotasse (V. Poisson, tomo I, n. 263; e Bucharlat, *Elem. di Mecc.*, num. 380).

Ora se il moto della terra divenisse più celere, allora il tempo T della rotazione verrebbe a diminuire, e la forza centrifuga crescerebbe, e crescendo differirebbe meno di G: si è quindi calcolato che se il moto della terra intorno al suo asse fosse 17 volte più rapido di quello che è, risulterebbe $F' = G$. Poichè, pel numero 97, $F : F' = G :: \frac{1}{T^2} : \frac{1}{T'^2}$, o sia $T'^2 = \frac{F}{G}T^2$, e $T' = \frac{T}{\sqrt{289}} = \frac{T}{17}$. Allora i corpi non cadrebbero all' equatore; e se crescesse di più la rapidità della rotazione, i corpi salirebbero su nell' atmosfera, come fa il fumo.

CAPO III.

DEL MOVIMENTO IN UNA CURVA QUALUNQUE E IN PARTICOLARE IN UNA DELLE CONICHE.

100. Due forze, l'una uniforme che spinge un corpo in linea retta, e l'altra centrale che lo richiama di continuo dalla linea retta verso un punto fisso, le quali si compongono insieme, sono gli elementi di una via curvilinea, di una trajettoria, di un'orbita. Ecco in che conviene ogni movimento curvilineo prodotto da una forza centripeta. Ma sebbene tutte le trajettorie abbiano di comune la forza centripeta e centrifuga, e tutte risultino dalla combinazione della forza tangenziale e della centrale; pure come tali forze si possono in più modi e con quantità diverse e sotto diversi angoli tra loro combinare; così curve ne nascono che varie sono e mul-

tiplici e d'indole diversa. È giusto adunque d'indagare con quali leggi in una curva qualunque ha luogo il movimento, quali sono le sue proprietà, quali i valori delle due forze centrale e centrifuga, e altre cose simili.

È prima d'ogni altra cosa da riflettere che qualunque trajettoria si può immaginare, che si confonda in ciascun punto in una estensione infinitamente piccola col suo cerchio osculatore in questo punto. Così il circolo *APB* (*fig.* 24) passa e si confonde in *P* coi due punti contigui della curva *VPG* descritta con una forza diretta al punto *S*, e in due istanti consecutivi il corpo si muove per li due elementi contigui *P* della curva, come se mosso si fosse sulla circonferenza di un cerchio, o sia per *ACPB*. In un intervallo adunque di tempo infinitamente piccolo si può supporre che il mobile si muova circolarmente attorno il centro di curvatura, e di avere la forza centrifuga che si conviene a tal moto circolare. E però in una curva qualunque la forza centrifuga si misura come nel cerchio dal quadrato della velocità diviso pel raggio del cerchio osculatore. Per lo che una curva qualunque è una somma di archetti circolari infinitamente piccoli, la cui posizione e grandezza varia continuamente. Segue da ciò, che come la posizione e grandezza del cerchio osculatore varia, viene del pari a variare la forza centrifuga che distrugge ora più ed ora meno la centrale. La forza che si parte da *S* (*fig.* 24), e coll'ajuto della quale si descrive l'archetto infinitamente piccolo *Pa*, si può sciogliere in due, l'una nel senso del raggio osculatore diretto per *PA*, e l'altra secondo l'elemento della curva *Pa*. La prima si equilibra colla forza centrifuga, e la seconda aumenta la velocità del corpo per la curva. Varia quindi viene a risultare in ogni istante la velocità del mobile per la curva nello stesso modo che è variabile il valor della forza centrifuga. Ma ciò non pertanto come le trajettorie hanno degli elementi comuni; così sono fornite di proprietà comuni, che giova qui di notare, come quelle che formano la parte più importante della teorica generale del moto per una curva qualunque descritta in virtù di una forza diretta a un punto fisso.

101. Un corpo sospinto dalla forza projettile *VA* (*fig.* 21) descriverebbe la retta *AC*; ma come nel medesimo tempo è tirato verso *X* dalla forza centrale eguale

AD; perciò si porta a trascorrere AB nello stesso istante in cui avrebbe descritto AC e AD. Ora in luogo di riguardare il corpo che trascorre AB, si può considerare il raggio vettore XA, che trasporta il mobile per AB, e descrive l'area del triangolo AXB, la quale, come quella ch'è tracciata dal raggio vettore in un tempo infinitamente piccolo intorno all'origine X della forza, si può chiamare un settore. Giunto il mobile in B, il raggio vettore traccerebbe un'area BXH eguale alla prima in un istante eguale al primo; perciocchè in virtù dell'inerzia descriverebbe $BH = AB$, e nella direzione medesima di AB, o sia le due basi AB, BH eguali; e oltre a ciò avendo in due triangoli AXB, BXH il vertice comune in X, e le due basi in una linea retta ABH, la perpendicolare, ch'esprime la loro altezza, sarebbe unica o eguale, e quindi le due aree AXB, BXH descritte colla medesima velocità e in due istanti eguali sarebbero eguali. Ma arrivato il mobile in B, la forza centrale BE si combina colla tangenziale $BH = BA$, e viene costretto a descrivere la diagonale BG; e così il raggio vettore descrive l'area BXG = all'area BXH. Imperocchè questi due triangoli hanno per base comune il raggio vettore BX, e i loro vertici H e G in mezzo alle rette HG e BE, che sono paralelle; perchè HG e BE come lati opposti del paralellogrammo $BHGE$ sono paralelli, o sia hanno altezze eguali, e perciò le loro aree sono eguali. E siccome l'area BXH, che il raggio vettore avrebbe descritto senza la forza combinata BE, è eguale all'area AXB; così le due aree AXB, BXG, tracciate dal raggio vettore in due istanti consecutivi ed eguali, sono eguali. E così di mano in mano nel terzo e quarto istante il corpo giunto in G descrive GO, e poi OM, e il raggio vettore le aree GXO, OXM, ec., che per le indicate ragioni sono eguali tra loro e alle aree BXG e AXB. Se dunque le aree descritte dal raggio vettore in tempi eguali sono eguali, l'area descritta dal raggio vettore cresce come cresce il numero degl'istanti, e dicesi proporzionale al tempo, o sia in due istanti è doppio, in tre è triplo, ec.

102. E all'inverso poste eguali le aree AXB, BXG, sarà $BXG = BXH$. E come questi due triangoli hanno la stessa base BX; così la retta HG che giunge i loro vertici è paralella a questa base. Or giusta le leggi della

composizione delle forze questa retta è sempre parallela alla direzione della forza che opera in B, e impedisce (num. 101) di continuare la direzione BH. E però la direzione di questa forza deve coincidere con BX, o sia esser diretta all'origine X delle aree. Lo stesso avviene per GXO, ec. Sebbene adunque la velocità di un mobile in ogni trajettoria, che non è il cerchio, sia variabile; pure è sempre tale, che le *aree descritte dal raggio vettore attorno ad un punto fisso sono proporzionali ai tempi; e all'inverso se le aree tracciate dal raggio vettore attorno ad un punto fisso crescono, come i tempi, la forza che sollecita il corpo è costantemente diretta verso un tal punto.* Questa proprietà, che si nomina il *principio delle aree*, ci somministra il carattere con che si conosce quando una trajettoria qualunque è descritta in virtù di una forza centrale.

103. Il principio delle aree porge il modo di conoscere e misurare le velocità effettive e angolari di un corpo che gira in una trajettoria in virtù di una forza diretta a un punto fisso. Di fatto nel trascorrere che fa il corpo A (*fig.* 22) l'orbita ALE mercè una forza diretta al punto fisso X, guidate le tangenti BE, DF ai punti A e L, si prendano le aree tracciate dal raggio vettore in tempi eguali, cioè a dire AXB, LXD. Il valore allora della prima area è eguale ad $AB \times {}^1/_2\ XE$, ch'è la perpendicolare condotta dal vertice X sulla base BA prolungata; e il valore della seconda area per la stessa ragione è espresso da $DL \times {}^1/_2\ XF$. E siccome, pel num. 101, $AB \times \frac{XE}{2} = DL \times \frac{XF}{2}$, così AB spazio curvilineo, o, come chiamasi, *celerità effettiva*: DL *celerità effettiva* $:: \frac{XF}{2} : \frac{XE}{2} :: XF : ZE$; cioè a dire, *le velocità effettive di un corpo che gira in un'orbita qualunque per una forza diretta a un punto fisso, sono reciprocamente proporzionali alle normali condotte da questo punto sulle tangenti.*

104. Segue da ciò, che il corpo nell'atto di girare deve accelerare tanto più il suo movimento quanto più si avvicina al centro della forza, o al punto fisso; perciocchè allora la normale guidata dal punto fisso alla tangente diventa più piccola. Il corpo girando nell'orbita $ABCDE$, ec. (*fig.* 23), è animato di una velocità

minore in B che in F, e di una maggiore in H che in G, perchè la normale da X alla tangente in H è molto più piccola di quella condotta da X alla tangente in F e B. E veramente essendo eguali le aree AXB, BXC, CXD, ec., descritte dal raggio vettore, come quelle che sono state tracciate in tempi eguali, non ci è dubbio che gli archetti AB, BC, ec., moltiplicati per le loro rispettive normali condotte da X, debbono essere eguali. Ora se le normali van decrescendo, per conservarsi i prodotti eguali, gli archetti, che rappresentano le velocità effettive, debbono crescere in proporzione; e perciò HG sarà più grande di GF, e questo di FE, ec. Indi è che il corpo rotante come si va avvicinando al centro delle forze va accelerando il suo movimento, percorre spazj più grandi e aumenta la sua velocità. Ora il punto B il più distante da X si dice *afelio;* il punto H il più vicino a X *perielio;* il punto X *foco;* la linea BXH, che dall' afelio passa pel foco e giunge al perielio, si dice *linea degli apsidi.* Si può quindi affermare che il corpo rotante ha la massima e minima velocità nella linea degli apsidi, la prima nel perielio e la seconda nell' afelio; di modo che la velocità va crescendo dall' afelio al perielio per diventare il *maximum*, e al contrario va decrescendo dal perielio all' afelio per giungere al *minimum.* Siamo dopo ciò in istato di vedere il legame delle verità; perchè ogni trajettoria è descritta in virtù di una forza centrale, le aree in ogni trajettoria sono proporzionali ai tempi. Perchè le aree sono proporzionali ai tempi, le velocità effettive sono in ragione inversa alle normali; e perchè le velocità sono reciproche alle normali, esse sono uniformi nel cerchio, in cui i raggi sono tutti normali alle tangenti ad ogni punto della circonferenza, e variabili in una trajettoria, che non è il cerchio; o sia l' uniformità e la variazione della velocità provengono e sono casi particolari dello stesso principio.

105. Un altro conseguente è la determinazione delle velocità di circolazione, o, come chiamano i meccanici, della *velocità angolare*, la quale è rappresentata dall' angolo descritto dal mobile in ciascun elemento di tempo, com' è l' angolo AXB (*fig.* 23), o pure l' angolo aSb (*fig.* 26). Quest' angolo, che si considera come un elemento o sia come infinitamente piccolo, è misurato dal-

l'archetto ab, che si riguarda per circolare e appartenente a un circolo, il cui raggio $= 1$. In questo senso si ha la proporzione angolo $aSb : 1 :: $ archetto $ab : Sb$, o sia archetto $\frac{ab}{Sb} =$ angolo aSb. E siccome (num. 103) $ab = \frac{\text{area } aSb}{SM}$, e la normale SM varia in ragione del raggio vettore Sb; così ab può rappresentarsi dall'area $\frac{aSb}{Sb}$, e l'angolo aSb diviene $= \frac{\text{area } aSb}{Sb} \times \frac{1}{Sb} = \frac{\text{area } aSb}{Sb^2}$. Ora l'area aSb, posti tempi eguali, è costante; dunque l'angolo aSb può variare solamente, come va cangiando $\frac{1}{Sb^2}$, o sia in ragione inversa del quadrato Sb^2. E però si conchiude che *nella medesima curva la velocità angolare varia in ragion reciproca al quadrato della distanza;* o, in altri termini, *in ogni trajettoria le velocità angolari sono reciprocamente proporzionali ai quadrati dei raggi vettori.*

106. Poste sì fatte cose, è ora da apprezzarsi il valore della forza centrale in ciascun punto di una trajettoria. E però si ponga mente all'archetto Pa (*fig.* 27) descritto in un istante, in cui S è il centro della forza, PY una tangente, SY una perpendicolare guidata dal centro della forza alla tangente, e PV la corda del cerchio osculatore (num. 100) che passa pel centro S della forza. Si tratta dunque di estimare il valore della forza diretta a S, con cui è descritto l'archetto Pa.

A ciò fare si conduca ac perpendicolare a SP; e posto S come centro, si descriva l'archetto circolare ab, e si guidi Ba paralella a SP. Allora Pa esprime il moto del mobile per la curva in un istante, Pc rappresenta quella parte del moto ch'è verso S, e in virtù di cui il mobile in un istante sarebbe alla distanza cS da S; ca rappresenta il moto orizzontale, che componendosi con Pc fece sì che il mobile giungesse nel medesimo istante in a alla distanza Sa, o pure alla distanza Sb da S; bc indica la forza centrifuga, perchè denota che la forza di projezione o il moto orizzontale ca ha fatto allontanare il mobile da S per uno spazio eguale a cb; e finalmente Ba dimostra la forza centripeta, come quella ch'esprime la quantità della deviazione del mobile dalla tangente per cagione della forza centrale. E in generale

quella parte del raggio vettore frapposta tra la tangente e l'estremità dell'archetto è lo spazio che la forza centrale ha fatto descrivere.

Ora questo spazio, ch'è rappresentato da *Ra* nella *fig.* 24, si può conoscere facilmente. Poichè l'archetto *Pa* del circolo osculatore si confonde con l'archetto infinitamente piccolo *Pb* della curva, *Ra* paralella a *PS* è eguale a *bR*, e l'archetto *Pa* si confonde colla sua corda. Oltre a ciò, l'angolo $RaP =$ all'alterno aPD, e l'angolo tra la corda e la tangente $RPa = PDa$ nell'alterno segmento, per cui i due triangoli *RPa*, *PDa* sono simili. E però $PD : Pa :: Pa : Ra$, o sia *Ra* descritto in virtù della forza diretta a $S = \frac{Pa^2}{PD}$. E siccome la velocità del mobile per l'archetto circolare *Pa*, che si confonde colla corda corrispondente e coll'archetto *Pb* della curva, è proporzionale al tempo impiegato a descriversi dal mobile (num. 91); così dato l'istante o il tempo possiamo a *Pa* sostituire la velocità *V*, e l'espressione della forza sarà $= \frac{V^2}{PD}$. Finalmente perchè *V*, pel num. 105, $= \frac{1}{SO^2}$, ne segue per ultima espressione della forza centrale ch'essa è $= \frac{1}{SO^2 \times PD}$. Per lo che la forza centrale va in ciascuna trajettoria variando come $\frac{1}{SO^2 \times PD}$, o sia in *ragione inversa del quadrato della perpendicolare guidata dal centro della forza sulla tangente moltiplicata per la corda del cerchio osculatore, che passa pel centro della forza medesima.*

107. Conosciuto il valore della forza centrale, si potrebbe ricercare giusta quale legge va essa variando in qualunque trajettoria. Ma non potendo usare dei calcoli sublimi, ci ristringiamo a cercare una sì fatta legge nelle sole curve coniche, che sono più d'ogni altro a noi necessarie per la spiegazione dei fenomeni celesti, cui soprattutto miriamo.

Sia *b* il luogo del mobile sull'ellisse *AbRNB* (*fig.* 26), *S* e *E* sieno i due fuochi di questa ellisse, *NC*, *BC* i due semiassi maggiore e minore, *SM*, *ED* due perpendicolari guidate dai fuochi sopra *MD* tangente al punto *b*, *RC* paralella a questa tangente, *Ia* lo spazio tras-

corso in virtù della forza centrale, e finalmente facendo il raggio $= 1$, sia $s =$ al seno dell'angolo $SbM = EbD$. Ciò posto, nel triangolo SbM sarà $s = \frac{SM}{Sb}$, e nel triangolo EbD $s = \frac{ED}{Eb}$. Nascono da queste due equazioni due espressioni diverse del quadrato s^2. La prima è $s^2 = \frac{SM^2}{Sb^2}$, e la seconda $s^2 = \frac{SM \times ED}{Sb \times Eb}$. Questa seconda espressione si può parimente tradurre in un'altra forma, sia che la curva data fosse un'ellisse, o pure un'iperbole; perciocchè sappiamo per la dottrina delle sezioni coniche che nell'ellisse e nell'iperbole $SM \times ED = BC^2$, e $Sb \times Eb = RC^2$. E però si avrà per li due valori di s^2 l'equazione $\frac{SM^2}{Sb^2} = \frac{BC^2}{RC^2}$, o sia nell'ellisse, e nell'iperbole la perpendicolare guidata dal centro delle forze alla tangente, che nel caso nostro è $SM^2 = \frac{BC^2 \times Sb^2}{RC^2}$. Per estimare poi nell'ellisse e nell'iperbole la corda del cerchio osculatore, è da ricordare che essa giusta la dottrina delle sezioni coniche in quelle due curve $= \frac{2RC^2}{NC}$; l'espressione tutta adunque della forza centrale $\frac{1}{SO^2 \times PD}$ applicata all'ellisse e all'iperbole si riduce a $\frac{RC^2}{BC^2 \times Sb^2} \times \frac{NC}{2RC^2} = \frac{NC}{2BC^2 \times Sb^2}$. E siccome BC, NC sono quantità costanti, perchè esprimono i due semiassi; così ne segue che la forza centrale nell'ellisse e nell'iperbole varia in ciascun punto nella ragione reciproca di Sb^2, o sia del quadrato della distanza dal centro S della forza.

Parimente se la trajettoria sia una parabola, sappiamo dalle sezioni coniche che la corda del cerchio osculatore $= 4Sb$, e che il quadrato della normale o sia SM va cangiando in ragione di Sb distanza del foco al punto della curva; di modo che la forza varia come $\frac{1}{4Sb^2}$, cioè a dire in ragione reciproca del quadrato della distanza. Per lo che si può conchiudere in generale che *la forza centrale diretta al fuoco dell'ellisse, dell'iperbole o della parabola, o sia che tende al fuoco di una sezione conica, varia reciprocamente come il quadrato della distanza.*

108. Posta all' inverso la legge della forza in ragione inversa del quadrato della distanza, la curva che fa essa descrivere è una delle coniche. Poichè ove si conosce la distanza del foco da un punto qualunque della curva o sia Sb (*fig.* 26), la perpendicolare SM guidata dal foco alla tangente, e il parametro, si può per mezzo di questi tre elementi descrivere una curva conica qualunque. Ed ove si può, devesi descrivere; giacchè un corpo per mezzo degli stessi dati non può descrivere due curve differenti. Ed in verità perchè si abbia un' espressione generale del parametro dell' ellisse e dell' iperbole, si guidi (*fig.* 26) aF perpendicolare al raggio vettore Sb; allora a cagione dei triangoli simili si avrà $Fa^2 : ba^2 :: SM^2 : Sb^2$, e, pel num. 107, come $BC^2 : RC^2$, o, ciò che vale lo stesso, per la ragione che non turbasi la proporzione, $\frac{Fa^2}{Ia} : \frac{ba^2}{Ia} :: \frac{2BC^2}{NC} : \frac{2RC^2}{NC}$. In quest' ultima proporzione, come i due conseguenti $\frac{ba^2}{Ia}$ e $\frac{2RC^2}{NC}$ sono eguali tra loro, perchè ciascuno, pe' num. 106 e 107, è eguale alla corda del cerchio osculatore che passa a traverso del centro della forza; così è da conchiudersi che i due antecedenti sono del pari eguali, o sia che $\frac{Fa^2}{Ia} = \frac{2BC^2}{NC}$. Ora il rapporto dei due assi maggiore e minore $\frac{2BC^2}{NC}$ giusta le sezioni coniche esprime il parametro dell' ellisse e dell' iperbole; e perciò $\frac{Fa^2}{Ia}$ rappresenta in queste due curve il loro parametro. Finalmente la parabola si può riguardare come un' ellisse, il cui asse maggiore è infinito, o sia come il limite a cui si accosta l' ellisse a misura che si accresce l' asse maggiore; e oltre a ciò il rapporto di $\frac{Fa^2}{Ia}$ ha luogo quando l' archetto ab è infinitamente piccolo, e l' archetto ellittico si confonde col parabolico; e perciò $\frac{Fa^2}{Ia}$ denota anche il parametro della parabola. Si può quindi stabilire generalmente come un' espressione del parametro comune all' ellisse, all' iperbole e alla parabola $\frac{Fa^2}{Ia}$, allorchè la forza tende al centro.

109. Ciò posto, dato Sb, e l' angolo SbM, la velocità

e la forza son date, e si conosce subito nel triangolo rettangolo SMb la perpendicolare SM; e data la forza che opera in un istante, si ricava Ia (num. 106); e similmente conosciuta la velocità, in un istante si conosce ba dal rapporto della velocità e del tempo; e finalmente siccome $Fa = \frac{\text{area } aSb}{Sb}$, e quest' area, conosciute le quantità ab e SM, pel num. 103, si conosce; così ci è noto il valore di Fa. Data adunque la legge della forza in ragione inversa al quadrato della distanza, si ricava subito Sb, SM, e $\frac{Fa^2}{Ia}$ o sia il raggio vettore, la normale e il parametro; e perciò in virtù di questa forza si descrive una delle sezioni coniche. Noi abbiamo ricavato queste verità quasi per approssimazione e per metodi indiretti cavati dai *Principj matematici* del Newton; ma chi le volesse dimostrate con più esattezza ed eleganza, potrà leggere Poisson e gli altri autori di meccanica.

110. La ragione che determina il mobile a descrivere una curva conica piuttosto che un' altra in virtù della medesima forza centrale, è riposta nella quantità della forza projettile, che combinandosi colla centrale mette in giro il corpo. Giacchè si è da noi dimostrato nel n. 93, che ove il mobile si partisse in una direzione perpendicolare a quella della forza centrale con una velocità orizzontale $= \frac{R}{2}$, o alla metà della distanza dal centro della forza, ne risulta una forza centripeta eguale alla centrifuga, e il mobile descrive un circolo. Così se Ob (*fig.* 26) fosse $= \frac{Sb}{2} = bX$, un corpo colla velocità acquistata cadendo per Ob, e in virtù della forza centrale Sb, che opera come $\frac{1}{Sb^2}$, si metterebbe a girare nel circolo bLH, il cui centro è il centro S della forza. Ma se Ob fosse minore di bX, o pure più grande di BX, e meno di bS, allora il corpo cadendo per Ob acquisterebbe una velocità tale, che partendo con questa velocità orizzontale, e spinto dalla forza centrale come $\frac{1}{Sb^2}$, percorrerebbe un' ellisse. Quando la velocità orizzontale è meno di bX, dovrà descrivere, pel num. 108, una trajettoria

conica, e questa al di dentro del circolo bLH ch'è stato trascorso con una velocità orizzontale $= bX$; e perciò la trajettoria stessa sarà l'ellisse $bABNR$, ec., che ha il centro della forza in S o sia nel foco più lontano da b. In questo senso i projetti muovendosi con una velocità orizzontale, minore di quella che acquisterebbero cadendo per la metà del raggio terrestre, non descrivono in verità una parabola, ma l'ellisse $AGBD$ (*fig.* 16), che ha per centro della forza il centro C della terra, e trovasi collocato nel foco più lontano da A. Ma perchè il corpo della terra impedisce ai projetti di descrivere l'intera ellisse; indi è che l'archetto ellittico AGB si tiene per parabolico, e la curva descritta dai projetti per parabola. Quando poi la velocità orizzontale, da cui è sospinto il mobile, è più di quella che avrebbe cadendo per la metà della distanza tutta bS (*fig.* 26); allora la trajettoria è parimente un'ellisse, ma il centro della forza è situato nel foco più vicino al punto da cui comincia il mobile a rotare. Così partendosi da H (*fig.* 23) avrà il centro della forza nel foco X. Aumentandosi in terzo luogo la forza projettile, o sia movendosi con una velocità orizzontale eguale o maggiore di Sb, la trajettoria sarà nel primo caso una parabola, e nel secondo un'iperbole; finalmente se la forza di projezione è nulla o infinitamente piccola, il mobile descrive una linea retta, che può considerarsi come un'ellisse infinitamente schiacciata, o, come dicesi, *appiattita*. Guidando in fatti bS (*fig.* 26) normale a NA, e facendo svanire l'asse minore BC, ne segue che S coincide con N, E con A, b con G, Eb diventa AG; di modo che il mobile scende dalla quiete per la retta AG. Data adunque la medesima forza centrale, che opera nella ragione inversa del quadrato della distanza, la trajettoria sarà sempre una curva conica, eziandio quando è una linea retta; ma sarà la parabola, un circolo, o un'ellisse, o un'iperbole, o una linea retta, secondo la quantità diversa della forza di projezione (V. Poisson, *Meccan.* T. I, lib. 2, § 3, n. 345).

111. In questo modo salendo a poco a poco dalla considerazione del movimento per una linea retta, e poi per la parabola, e quindi pel circolo, siamo pervenuti alla teorica generale della forza centrale; e ora comprendendo sotto un'espressione generale il modo con cui

opera questa forza, siamo in istato di riguardare come casi particolari tutti questi movimenti, e il movimento per la linea retta, per la parabola, per l'ellisse, pel cerchio e per l'iperbole risulta dalla forza projettile e dalla centrale che opera in ragione inversa del quadrato della distanza.

112. Riguardando più d'ogni altra cosa all'ellisse, come quella che descrivesi dai pianeti, egli è chiaro che questa curva, come si vede nella *fig.* 23, risulta da un numero infinito di archetti circolari descritti con raggi ora crescenti ed ora decrescenti, e con velocità che, pel num. 103, van sempre variando. E siccome la forza centrifuga $= \frac{v^2}{r}$; così essa da B in C, da C in D, ec.; o sia dall'afelio B al perielio H va sempre crescendo in modo ch'è minima in B, e massima in H. Ed all'inverso nell'altra metà dell'ellisse HAB la forza centrifuga per la stessa ragione va successivamente ed in egual modo decrescendo in guisa tale che da H, in cui è massima, ritorna ad essere minima in B. E come, pel num. 104, nell'afelio $v^2 = \frac{1}{XB^2}$, e nel perielio $v^2 = \frac{1}{XH^2}$; così la forza centrifuga, ch'è $= \frac{v^2}{r}$, si trasforma nell'afelio in $\frac{1}{XB^3}$, e nel perielio $\frac{1}{XH^3}$, o sia la minima alla massima è come XH^3 a XB^3.

Ora il valore della forza centripeta nei due punti di B e di H, pel num. 107, $= \frac{NC}{2BC^2 \times Sb^2}$. Nell'ellisse $\frac{2BC^2}{NC}$, come si sa per le sezioni coniche = al parametro, che si può chiamare P, e in questo senso $\frac{NC}{2BC^2} = \frac{1}{P}$. Oltre a ciò, Sb nell'afelio è rappresentato da XB, e nel perielio da XH; laonde la forza centripeta in B : a quella in H :: $\frac{1}{P \times XB^2} : \frac{1}{P \times XH^2}$ :: $P \times XH^2 : P \times XB^2$. Ora il parametro P è minore di XB, e maggiore di XH; dunque la forza centripeta rappresentata nell'afelio da $P \times XH^2$ è sempre maggiore della forza centrifuga espressa nell'afelio da XH^3; e al contrario la forza centrifuga rappresentata nel perielio da XB^3 è sempre maggiore della centripeta, la quale nello stesso punto è rappresentata da $P \times XB^2$.

Segue da ciò che il corpo rotante in una ellisse, quando si trova nell'afelio, si deve avvicinare al centro X, perchè la forza centripeta prevale ed è maggiore della centrifuga. Ed al contrario nel perielio si deve allontanare da X, perchè la centrifuga ivi supera la centripeta. Per lo che come dall'afelio passa avvicinandosi a X nel perielio, la forza centripeta va diminuendo, e la centrifuga va crescendo, finchè questa di quella diventa superiore; e al contrario dal perielio passando all'afelio, la forza centrifuga va diminuendo, e la centripeta crescendo finchè questa di quella diventa maggiore. Che se le due forze centrali nel passar dall'afelio al perielio, e da questo a quello, sieno in qualche punto per avventura eguali, non potranno mai far descrivere al corpo un cerchio; perciocchè il raggio vettore non può mai formare un angolo retto colla tangente, se non nei due punti afelio e perielio, dove le due forze centripeta e centrifuga sono ineguali. In questo modo si dichiara perchè il corpo ora si allontana dal centro delle forze ed ora gli si avvicina nel descrivere un'ellisse. Questa spiegazione fu immaginata da Newton, che seppe il primo applicare i teoremi di Hugenio sul moto circolare all'ellittico; e da ciò vedesi che tutto l'artifizio della teorica delle curve consiste nel risolvere gli archetti ellittici in circolari, e questi in linee rette, le quali si risolvono nelle forze componenti a norma del parallelogrammo delle forze, ch'è la guida e 'l principio che influisce in tutta la meccanica.

113. Se ci mettiamo a considerare più corpi che in virtù della medesima forza centrale ruotano in ellissi che hanno un foco comune, si può facilmente dalle verità già dimostrate ritrarre il rapporto che passa tra i loro tempi periodici. Poichè il tempo periodico tutto T è all'unità di tempo come l'area tutta S dell'ellisse all'area s descritta nell'unità di tempo, o sia $T = \frac{S}{s}$. Ora S nell'ellisse è proporzionale al prodotto dei due assi $A \times B$, e s varia ed è proporzionale a $Sb \times Fa$ (*fig.* 26); e però s^2 varia come $Sb^2 \times Fa^2$. E siccome Fa^2, pel num. 108, $= P \times Ia$, così $s^2 = P \times Ia \times Sb^2$; anzi la forza centrale Ia variando come $\frac{1}{Sb^2}$, ne segue che s^2 varia solamente come P, o sia come il parametro ch'è

$= \frac{B^2}{A}$. L'equazione dunque $T = \frac{S}{s}$ si può trasformare in $T = \frac{A \times B}{\sqrt{\frac{B^2}{A}}}$, o sia $T^2 = A^3$, che dimostra il quadrato del tempo periodico esser proporzionale al cubo dell'asse maggiore; di modo che due corpi che sospinti dalla medesima forza centrale ruotano in ellissi che hanno un foco comune, avranno $T^2 : T'^2 : A^3 : A'^3$; e in generale si può stabilire che ove *più corpi girano in ellissi che hanno un comune centro di forza, i quadrati dei loro tempi periodici sono come i cubi dei grandi assi delle loro orbite*. Questa verità, che ci sarà di grande uso nella meccanica celeste, deriva da ciò, che le aree descritte in tempi eguali in orbite differenti sono proporzionali alle radici dei loro parametri, e questo nasce dal teorema delle aree proporzionali ai tempi, e finalmente dalla teorica della forza centrale. Tanto egli è vero che tutte le verità si connettono e reciprocamente tra loro si assodano e si confermano.

114. Sia $BPDA$ (*fig.* 25) un'ellisse il cui foco è in S, il centro in C, e la distanza CS esprime la sua eccentricità. Sia BP' una curva tale che SP sia sempre eguale a SP', e l'angolo BSP nell'ellisse sta all'angolo BSP' nella curva come F sta G costantemente. E come l'ellisse e la curva si trascorrono per una forza centrale diretta a S; così in ciascuna curva si descrivono aree eguali in tempi eguali. Ora si domanda quali sono le loro forze centrali, e quando gli apsidi A e B restano immobili?

La forza centrifuga nella *fig.* 27 è rappresentata da bc, la quale, pel num. 92, $= \frac{ab^2}{2Sb}$; e come ab^2 varia in proporzione all'area $\frac{Sab^2}{Sb^2}$; così la forza centrifuga è rappresentata da $\frac{Sab^2}{2Sb^3}$; anzi confondendosi l'archetto circolare ab con quello Pa della curva, ch'è infinitamente piccolo, viene a variare come $\frac{SPa^2}{SP^3}$. E però nella stessa curva la forza centrifuga, data l'area SPa descritta nell'elemento del tempo, varia come $\frac{1}{SP^3}$, e in curve dif-

ferenti, posta la distanza medesima SP, le forze centrifughe sono tra loro come i quadrati delle aree descritte in un tempo dato. Per lo che essendo le aree BSP, BSP' (*fig.* 25) nella stessa ragione degli angoli F, G, si avrà la forza centrifuga nel punto P dell'ellisse $= \frac{F^2}{SP^3}$, e nel punto P' della curva $= \frac{G^2}{SP^3}$, e la loro differenza $= \frac{G^2 - F^2}{SP^3}$.

Conosciute le forze centrifughe, sono da estimarsi le centripete. E primieramente la forza centripeta nella *fig.* 27 è espressa da Ba e la centrifuga da bc. La prima, pel num. 106, $= \frac{aP^2}{PV}$, e la seconda (num. 114) $= \frac{ab^2}{2Sa}$; e perchè gli archetti aP, ab si confondono $= \frac{ab^2}{2SP}$; di modo che l'una è all'altra come $\frac{aP^2}{PV}$ a $\frac{ab^2}{2SP}$. E come per la somiglianza dei triangoli $aP^2 : ab^2 :: SP^2 : SY^2$; così la forza centripeta è alla centrifuga $:: \frac{SP^2}{PV} : \frac{SY^2}{2SP} :: 2SP^3 : SY^2 \times PV$. Ora conosciuto questo rapporto delle due forze in qualunque curva, e stabilito il valore della centrifuga in P (*fig.* 25), si avrà forza centripeta : $\frac{F^2}{SP^3} :: 2SP^3 : SY^2 \times PV$, o sia il valore della centripeta, nel medesimo punto P, è $= \frac{2F^2}{SY^2 \times PV}$. Anzi avendosi già posto nel num. 107 il valore di SY^2, e di PV, risulta $SY^2 = \frac{BC^2 \times SP^2}{CD^2}$, e facendo $BC^2 = \frac{AC \times BC^2}{AC}$ o sia eguale ad AC moltiplicato per metà del parametro, num. 108; ne segue che chiamando R la metà del parametro, sarà $SY^2 = \frac{AC \times R \times SP^2}{CD^2}$. Il valore poi di VP, pel num. 107, $= \frac{2CD^2}{AC}$. Per lo che la forza centripeta in $P = \frac{F^2}{R \times SP^2}$. Finalmente perchè la forza centrifuga nel punto P' della curva era maggiore della quantità $\frac{G^2 - F^2}{SP^3}$; perciò la forza centripeta del corpo che muovesi nella curva deve essere a proporzione accresciuta, affinchè il corpo che gira nella curva BP', e quello che ruota nell'ellisse BPD, ec., si tengano costantemente alla medesima distanza SP, o

sia la forza centripeta corrispondente a P' nella curva sarà $\frac{F^2}{R \times SP^2} + \frac{G^2 - F^2}{SP^3}$. E moltiplicando le due forze per R, sarà il loro rapporto $:: \frac{F^2}{SP^2} : \frac{F^2}{SP^2} + \frac{RG^2 - RF^2}{SP^3}$.

115. Ciò posto, si consideri la curva BDA come infinitamente vicina ad un cerchio, e si faccia variare la forza centrale $\frac{F^2}{SP^2} + \frac{RG^2 - RF^2}{SP^3}$, che ritiene il corpo nella curva BP', nella ragione d' una potenza qualunque di SP, e sia questa come SP^{n-3}; allora la forza centripeta avrà il rapporto $:: \frac{F^2}{SP^2} + \frac{RG^2 - RF^2}{SP^3} : SP^{n-3}$, e moltiplicando tutto per SP^3 sarà $:: F^2 \times SP + RG^2 - RF^2 : SP^n$. Che se ci piace di esprimere la massima distanza della curva dal centro della forza per T, e la distanza SP infinitamente vicina a T per $T - x$, intendendo per x una quantità infinitamente piccola, sarà il rapporto come $F^2 \times (T-x) + RG^2 - RF^2 : (T-x)^n$, cioè a dire $F^2T - F^2x + RG^2 - RF^2 : T^n - nT^{n-1}x$, trascurando tutti gli altri termini in cui si hanno potenze di x, perchè x è infinitamente piccolo. Ora il rapporto tra queste due quantità sarà costante, se le quantità costanti nei due termini stansi tra loro nella stessa ragione dei coefficienti dei termini variabili, cioè a dire se $F^2T + RG^2 - RF^2 : T^n :: - F^2x : - nT^{n-1}x :: F^2 : nT^{n-1}$. E come la ragione tra queste due ultime quantità si deve riputare costante, perchè i termini trascurati sono infinitamente piccoli rispetto a quei che sono ritenuti; così per costante deve tenersi il rapporto tra le prime due quantità costanti. Anzi tenendo T per eguale quasi a R, perchè R metà del parametro di una curva quasi circolare = al raggio, o alla massima distanza T, ne risulta $RG^2 : T^n :: F^2 : nT^{n-1}$, d'onde $RG^2 \times nT^{n-1} = F^2 T^n$, e perchè $R = T$, l'equazione sarà $G^2 \times nT^n = F^2 T^n$, e dividendo per T^n sarà $G^2 \times n = F^2$, o sia $G : F :: 1 : \sqrt{n}$, e quindi $G = \frac{F}{\sqrt{n}}$. E però essendo i corpi ruotanti in P e P' sempre alla medesima distanza da S,

debbono venire all' apside nel medesimo tempo, e come il corpo che ruota nell'ellisse viene all'apside quando $F = 180^\circ$; così l'altro che gira nella curva viene all'apside quando ha descritto l'angolo $G = \frac{180^\circ}{\sqrt{n}}$. Ora se la forza centripeta rappresentata nelle sue variazioni da SP^{n-3} fatto $n = 1$, sarà espressa da $SP^{1-3} = SP^{-2} = \frac{1}{SP^2}$, cioè a dire opera nella ragione inversa dei quadrati delle distanze, il movimento angolare G verrà $= \frac{180^\circ}{\sqrt{1}} = 180^\circ$. Se poi $n = 2$, sicchè la forza varia come $SP^{2-3} = SP^{-1} = \frac{1}{SP}$, cioè a dire se opera nella ragione inversa della semplice distanza, il corpo verrà all'apside prima di trascorrere 180°, perchè $G = \frac{180^\circ}{\sqrt{2}}$, che dà un risultato minore di 180°; finalmente se $n = 1/2$, di modo che la forza è rappresentata da $SP^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{SP^{\frac{5}{2}}}$, o sia se la forza opera in ragione inversa di una potenza più grande del quadrato della distanza, sarà $G = \frac{180^\circ}{\sqrt{1/2}}$, che ci presta un risultato maggiore di 180°. In somma siccome il movimento angolare di un apside all'altro allora è solamente 180°, quando $n = 1$, o sia quando la forza $= \frac{1}{SP^2}$ opera in ragione inversa del quadrato della distanza; così in questo solo caso gli apsidi si troveranno all'estremità dell'asse maggiore. Sotto questo punto di vista la linea degli apsidi si può riguardare come mobile o come stazionaria. Se nell' accostarsi il corpo rotante al centro della forza, questa opera in una ragione inversa minore del quadrato della distanza, l'asse maggiore o linea degli apsidi si rivolge quasi intorno al foco retrocedendo da A in D, perchè la distanza tra l'uno e l'altro apside è minore di 180°. Al contrario se la forza centripeta nell'avvicinarsi il corpo al centro della forza opera in una ragione inversa, ch'è maggiore del quadrato della distanza, perchè la distanza dall'uno all'altro apside viene a farsi più di 180°; si può dire che la linea degli apsidi rivolgendosi intorno al foco si è avan-

zata con un moto progressivo al di là di *A*. Finalmente ove la forza opera esattamente nella ragione inversa del quadrato della distanza, il movimento angolare dall' uno all' altro apside sarà di 180°, e la linea *BA* si può tenere come quieta, immobile e stazionaria. Posta adunque una forza centrale che opera nella ragione inversa del quadrato della distanza, la trajettoria del corpo rotante sarà una sezione conica; ed ove questa è un' ellisse, il corpo ora si avvicina e ora si allontana dal centro della forza, i quadrati dei tempi periodici sono come i cubi dei grandi assi, e la linea degli apsidi è stazionaria.

CAPO IV.

EPILOGO E STORIA DELLA DINAMICA.

116. Essendo la prima volta introdotto il nome di forza per indicare la facoltà organica del nostro corpo, in virtù di cui si muove, si ferma, eccita, o fa cessare i movimenti dei corpi circostanti; ove furono da noi osservati nell' universo alcuni agenti fisici i quali sono capaci di cagionare movimento, abbiamo in essi supposto una qualche somiglianza colla nostra facoltà organica, e per una delle solite traslazioni che fa il nostro spirito da noi alle cose fuori di noi, abbiamo distinto tali agenti fisici anche col nome di forze. Ma niente illusi da questo vocabolo, e nell' ignoranza in cui siamo della loro natura, abbiamo cercato di estimarle dagli effetti ch' esse forze producono, e con sagacità e senno abbiamo ridotto i loro effetti a due, cioè alle velocità che le potenze tendono ad imprimere, o a quelle che di fatto hanno comunicato a certe masse. Anzi per poterle apprezzare con più semplicità abbiamo comparato gli effetti di tutti le forze a quelli della gravità, e stabilito nella gravità come una unità di forza a cui come quantità riferisconsi tutte le altre. A ciò fare si sono paragonate e ridotte le due maniere di velocità le già nate, o quelle pronte a nascere alla velocità che si cagiona e proviene dalla gravità. Quando la forza degli animali, o delle molle, o dei fluidi in movimento, o di una potenza qualunque ha prodotto e comunicato una velocità finita, questa si considera come nata dalla ca-

duta di un grave in un dato tempo, e col favore del teorema *dell' altezza dovuta ad una data velocità* si rapporta alla gravità. Se le potenze esercitano il loro sforzo contro un ostacolo che arresta il moto nascente, o sia se esercitano una pressione, questa in quanto all'effetto si conviene e può rapportarsi alla pressione proveniente dalla gravità; e come una sì fatta pressione di un corpo pesante si misura dal peso, così le pressioni di qualunque forza si misurano parimente coi pesi e riduconsi alla gravità. Si è in fine per opera di Juan e di Prony bilanciato l'urto o la percossa di un corpo contro di un altro colla pressione; e con questo artifizio, come la pressione equivalente alla percossa si misura in peso, nello stesso modo si pesa, dirò così, il colpo di un bastone, o quello del martello sopra un'incudine. Tutte le forze adunque, sebbene eterogenee tra loro, si tengono in riguardo all'effetto per omogenee, si misurano tutte dalle velocità, o sia dalle circostanze a noi note dello spazio e del tempo, hanno in una forza, la quale è in natura, la loro unità di misura, ed esprimendosi l'effetto della gravità in numeri o in linee, sono parimente rappresentate in numeri e in linee tutte le forze, e diventano così un oggetto matematico. Indi è che nella dinamica si parla delle forze come di oggetti noti, che si valutano, che si comparano, che si compongono, ec., e che la scienza del movimento piglia il nome di *dinamica*, o sia di scienza delle forze.

Tra le forze, le prime a considerarsi sono le istantanee o impulsive, e queste si sono riferite al moto di un punto materiale. I principj che ci hanno guidato in questa ricerca sono stati le leggi di inerzia, e quello della forza proporzionale alla velocità, e 'l principio del parallellogrammo delle forze, i quali ci hanno insegnato che il moto di un punto animato da uno o più impulsi è uniforme e rettilineo; che nel moto uniforme gli spazj sono una funzione del semplice tempo; che la velocità è un carattere con cui distinguonsi i moti uniformi tra loro; e che date più forze che operano sopra un punto, facilmente si trova la direzione e velocità risultante. Al movimento di un punto abbiamo sostituito quello di una massa sospinta da uno o più impulsi, e per mezzo del centro di gravità abbiamo ricondotto questo secondo al primo caso; perciocchè altra differenza non ci è che

nel valore della forza, la quale risulta dalla velocità moltiplicata per la somma dei punti materiali o della massa, e piglia il nome di quantità di moto. Per lo che ad imprimere una certa velocità ad una massa qualunque in quiete o in movimento ricercasi una forza proporzionale alla massa moltiplicata per la velocità; che date forze eguali che sospingono masse ineguali, le velocità di queste masse sono in ragione inversa delle masse medesime; e che per mezzo della quantità di moto si misura l'urto, o sia lo sforzo che fa o è capace di esercitare un corpo contro un ostacolo qualunque.

Procedendo più innanzi, abbiamo preso a ricercare il movimento che risulta da un sistema di corpi che operano tra loro e comunicansi a vicenda dei movimenti; sia ch'essi operino tra loro immediatamente come nell'urto ordinario, o mediatamente come per fili, per leve, ec. Questo problema, che pare molto inviluppato, è stato da noi condotto a quella semplicità che maggiore si può, riducendolo al moto di un sistema di punti materiali, o che i corpi i quali operano tra loro sieno duri, o pure elastici. A quest'oggetto abbiamo supposto primieramente che i corpi si urtino direttamente a traverso i loro centri di gravità, affinchè ridotta la mutua azione del sistema dei corpi a quella dei loro centri di gravità, non si consideri altro moto che quello di un sistema di punti materiali. In secondo luogo per portare questi punti o centri di gravità ad essere elastici o perfettamente duri, non abbiamo riguardato alla causa dell'elaterio o della durezza, ma all'effetto finale dell'elasticità o della durezza. Il quale consiste in ciò, che quando un corpo duro cade perpendicolarmente sopra un piano immobile e incapace di compressione, la velocità con cui il corpo duro l'urta, del tutto si estingue, sì che la sua velocità v' diventa $= o$; quando però il corpo urtando contro questo piano è perfettamente elastico, esso corpo ripiglia in senso contrario tutta la velocità con cui venne all'urto, sì che V' diventa $= V$ in senso contrario. Per lo che il moto di un sistema di corpi o duri o elastici si riduce al moto di un sistema di centri di gravità, che urtando contro un piano immobile incapace di compressione, o perdono tutta la loro velocità, o la ripigliano interamente in senso contrario, o più brevemente si riduce ad un sistema di punti ma-

teriali duri o pure elastici. Con l'ajuto di tali considerazioni ci venne fatto di ritrarre dall'esperienza e dal calcolo che tutti i centri di gravità formando unica massa nel momento del contatto, pigliano una velocità comune; che la quantità di moto relativa alla velocità comune dopo l'urto è eguale a quella che avea luogo nel sistema prima dell'urto; e che questa velocità comune dopo l'urto è espressa dalla somma delle quantità di moto del sistema prima dell'urto divisa per la somma dei punti materiali, o sia dei centri di gravità o delle masse. E parimente nell'urto diretto dei punti elastici considerando che gli effetti dell'urto si raddoppiano a cagione della velocità che ripigliano dopo l'urto, si conosce la velocità che prende ciascun punto dopo l'urto col sottrarre la sua velocità prima dell'urto dal doppio della velocità comune che prenderebbe nel caso che fosse privo di elaterio. Ma quel ch'è più, egli è chiaro che nell'urto dei corpi elastici la somma delle forze vive dopo l'urto si conserva costante, ed è eguale alla somma primitiva delle forze vive prima dell'urto: di modo che nell'urto dei corpi elastici non ha luogo alcun dispendio di forze vive. Dall'urto diretto passando all'obbliquo, ci fu facile di ridurre questo a quello col favore del parallellogrammo delle forze, sia che i corpi fossero duri, o pure elastici. Abbiamo solo ritratto dall'urto obbliquo dei corpi elastici l'idea del moto riflesso, e stabilito per un teorema certo e fondamentale che nell'urto obbliquo dei corpi elastici l'angolo d'incidenza è sempre e costantemente eguale a quello di riflessione.

Sonosi dopo ciò introdotte le due proprietà geometriche dei corpi, l'estensione e la figura, ricercando il moto di un corpo animato da un impulso che non passa pel suo centro di gravità. Si ebbero allora nel corpo due moti contemporanei e diversi: l'uno di rotazione intorno al suo centro di gravità, per cagione che i suoi punti materiali sono sospinti da diverse e ineguali velocità; e l'altro di traslazione indipendente dal primo, perchè il suo centro di gravità si muove colla stessa velocità e direzione, come se l'impulso fosse direttamente passato e immediatamente applicato a questo centro. Il moto di traslazione del corpo, che proviene da quello del suo centro, ha luogo e sta sottoposto alle stesse leggi con cui si fa il moto di un punto materiale;

ma quello di rotazione, per cagion della figura del corpo, sta soggetto alcuna volta a vicende e a variazioni. Imperocchè se il corpo spinto da un impulso che non passa pel suo centro, fosse omogeneo e di figura sferica, la rotazione si farebbe costantemente intorno al diametro perpendicolare guidato pel centro, e per la direzione della forza impressa; ma se il corpo fosse eterogeneo e di figura non sferica, l'asse, intorno a cui si metterebbe a girare, potrebbe variare ad ogni istante. La matematica ricercando tutte le variazioni possibili, e abbracciando tutti i casi particolari, ci ha rivelato che in ogni corpo sono tre assi perpendicolari tra loro, attorno i quali egli può girare uniformemente quando non è sollecitato da forze straniere; ha chiamato questi tre assi, *assi principali di rotazione*, e ci ha in fine insegnato intorno a quale di questi tre assi l'equilibrio del corpo rotante è più o meno stabile. Da tutte queste considerazioni si è quindi ritratto, a principio, *la conservazione*, come dicesi, *del moto del centro di gravità*. Sia che la direzione delle forze passi pel centro di gravità di un corpo o no, sia che più corpi spinti da più impulsi operino tra loro formando un sistema, tutti i punti materiali di un corpo o tutti i corpi del sistema si possono considerare raccolti ed uniti nel comune centro di gravità, e tutte le forze applicate secondo la loro direzione a questo punto. E però il centro di gravità di un corpo o di un sistema di corpi al par di un punto materiale si muove uniformemente e in linea retta secondo la quantità o direzione della forza risultante, o al pari di un punto materiale si sta in riposo, quando la risultante è eguale a zero. Lo stato quindi del centro di gravità di un sistema di corpi o è in riposo, o si muove uniformemente in linea retta, quale che si sia l'azione reciproca dei corpi tra loro, sia che le forze sieno d'impulso, o pure di pressione.

Ma queste verità, che sono certe nella meccanica, non han luogo nel fatto che per approssimazione. Così in natura non si danno corpi perfettamente duri o elastici come li finge la meccanica; e però si è ricercato come le leggi generali si vengano a modificare secondo il grado diverso di durezza o di elasticità. Perturbano del pari le leggi della teorica lo strofinio, l'ostacolo che oppongono i fluidi al movimento dei solidi, e la rigi-

dezza delle funi, che è una resistenza la quale s'incontra principalmente nel moto delle macchine. Nel valutare sì fatti ostacoli abbiamo chiamato in ajuto le più belle esperienze che unite insieme prestar possono una scelta di materiali alla fisico-matematica, ond' essa in virtù dei suoi calcoli li applichi ad ogni macchina in particolare, e definisca in ciascuno strumento quale e quanto sia l'ostacolo dello strofinio e della rigidezza delle funi. In questo modo la fisica ci somministra la ragione per cui le leggi del moto dettate dalla teorica vengono meno nella pratica, ce ne mostra le cagioni, e come queste variano a tenore dei corpi stessi che si muovono; apprezza in generale il valore di queste resistenze, e porgendo i suoi esperimenti al fisico-matematico, lo agevola ad estimare con precisione ed esattezza le resistenze, affinchè si supplisca, quanto meglio si può, la differenza che passa tra la teorica e la pratica.

Dalle forze istantanee rivolgendoci alle continue, abbiamo posto nella gravità quasi il modello cui rapportar si può l'azione di questa maniera di forze. L'esperienza ci ha ammaestrato che i corpi che riduconsi a centri animati dalla gravità, cadendo dalla quiete per la verticale, percorrono spazj che crescono nella ragione dei quadrati dei tempi; che in ciascun secondo di tempo spazj descrivono, i quali van crescendo come i numeri impari 1, 3, 5, ec.; che le velocità in essi van crescendo nella ragione dei tempi; e che la velocità impressa in ciascun secondo è apprezzata da 32 piedi inglesi, o sia da uno spazio descritto con moto uniforme, il quale è doppio di quello che il punto trascorre nell' unità di tempo, o nel secondo. Donde si è da noi conosciuto che il moto generato dalla gravità è *uniformemente accelerato*, la gravità è una *forza accelerativa*, il cui effetto è d'imprimere eguali velocità in tempi eguali, e che sia da stimarsi per la velocità che genera in 1″ o sia per 32P trascorsi con moto uniforme. Alla gravità sostituendo una forza costante qualunque, ci è venuto fatto di stabilire in generale che da tali forze ne deriva al par che dalla gravità un moto uniformemente accelerato, quali sono le proprietà di questa maniera di moto, e di assegnare il modo di calcolare il valore di qualunque forza accelerativa; affinchè si possano mettere in confronto tra loro sì fatti moti, comparando tra loro le forze ac-

celerative da cui son generati. E questo metodo di comparare le forze ci aperse la strada a rinvenire il moto dei corpi in virtù della gravità lungo i piani inclinati; imperocchè siccome una massa che scorre lungo un piano non si muove in virtù di tutta la sua gravità, ma di una parte la quale è più o meno secondo l'inclinazione del piano, e dicesi gravità relativa; così un corpo il quale cade per la verticale, e un altro che scende lungo il piano, o pure due corpi i quali scorrono per piani diversamente inclinati, muovonsi tutti per cagione della gravità, ma non tutti per la stessa quantità di forza gravita, o sia riducesi il loro moto a moto cagionato per diverse forze accelerative. Ora la gravità relativa è alla gravità tutta nella discesa dei piani come l'altezza alla lunghezza del piano; di modo che gli spazj e le velocità descritte nella discesa per li piani sono agli spazj e velocità trascorse in tempi eguali per la verticale nella ragione dell'altezza del piano alla sua lunghezza, o sia nella ragione delle forze accelerative. Indi è che tutte le corde di un cerchio che finiscono in un'estremità del diametro, sono trascorse per l'azione della gravità nel medesimo tempo che il diametro, ec.

La gravità, che sola sospinge co' suoi replicati ed uniformi impulsi al movimento, si può considerare come quella che opera in senso contrario alla direzione di una forza istantanea, e genera quella maniera di moto che dicesi *uniformemente ritardato*. Poichè operando come resistenza distrugge secondo la sua natura, in tempi eguali, eguali ed uniformi gradi di velocità; e producendo un ritardo uniforme nel movimento, prende il nome di *forza ritardativa*. Indi è che gli spazj decrescono nella ragione dei numeri impari, o sia nella ragione dei quadrati dei tempi, ec. Dopo che riesce a chiunque manifesto che un moto qualunque si può esprimere per una funzione di tempo; perciocchè gli spazj nel moto uniforme sono come i tempi, e nel moto uniformemente accelerato o ritardato crescono o decrescono nella ragione dei quadrati dei tempi; e però La Grange ha racchiuso in unica formola ogni maniera di moto, e per mezzo della teorica delle funzioni ha dimostrato che il moto uniforme e 'l moto uniformemente accelerato o ritardato non sono che casi particolari del moto vario in generale. Il primo proviene dall'azione di una o più

forze istantanee, e 'l secondo dall'azione delle forze continue che operano uniformemente. Dall'azione in somma delle forze istantanee sopra uno o più punti materiali, che formano un sistema e si alterano il movimento, è nata la teorica dell'urto dei corpi; e dall'azione delle forze continue, ravvisata nella gravità che opera sopra i corpi che cadono per la verticale o lungo un piano inclinato, origine ha avuto la teorica dei moti uniformemente accelerati e ritardati.

Giunti a questo termine dobbiamo confessare che i nostri passi non sono stati così franchi e sicuri come quelli dei fisico-matematici. Determinano essi il moto di un punto materiale nello spazio assegnando in ogn'istante la posizione delle sue projezioni sopra tre assi fissi; perciocchè riducono tutte le forze a tre paralelle a tre assi rettangolari, e sostituendo alle forze le rispettive velocità stabiliscono le tre coordinate del mobile rapportate ai tre assi, e determinano così la sua posizione nello spazio. In questo modo i valori delle coordinate rappresentano sopra ciascuno de' tre assi le projezioni della retta che descrive il mobile in un certo tempo e con una certa velocità, e le tre projezioni si tengono come tre punti mobili che sieguono il punto materiale che si muove nello spazio. E siccome le forze variabili, quali che si sieno, si suppongono costanti in grandezza e direzione, perchè operano in un tempo infinitamente piccolo; così il movimento che da esse deriva si valuta per la velocità moltiplicata pel tempo, o sia per uniforme. E però uniforme è il moto del punto materiale nello spazio, e uniformemente si muovono le projezioni del mobile sopra gli assi. Laonde un problema qualunque che riguarda il moto curvilineo, si scioglie per mezzo delle leggi del moto uniforme; giacchè si riduce alla considerazione di tre movimenti rettilinei quando la curva è a doppia curvatura, o pure a due quando è piana. Coll'ajuto adunque di questo metodo e del calcolo sublime vanno di leggieri e con eleganza i' fisico-matematici a determinare la natura di qualunque trajettoria; e supponendo centripete le forze, ne ricavano il principio delle aree, la curva dei projetti, e quindi il moto ellittico e le velocità effettive ed angolari, e tanti altri belli teoremi del moto curvilineo. Si rivolgono poi al movimento di un punto sopra una cur-

va, e la nozione ritraggono della forza centrifuga, e 'l valore di questa nel cerchio o in una curva qualunque; e supponendo il punto che si muove pesante, ne inferiscono le oscillazioni dei penduli, e le proprietà del pendulo cicloidale. Vanno in fine ricercando il moto di un punto materiale pesante sopra una superficie, e quello in particolare di un punto materiale sopra una sfera, con che la teorica si dichiara di un pendulo semplice ad oscillazioni coniche; e tanti altri problemi di mano in mano risolvono in generale con unico metodo, con pochi principj, in virtù del calcolo sublime.

Non così da noi si è praticato, che ristringendoci alla sola gravità, e procedendo, dirò così, di caso in caso, abbiamo cominciato di là dove i fisico-matematici finiscono. Poichè abbiamo considerato il moto di un grave per archi circolari o cicloidali; e riducendo gli archi cicloidali a circolari, e questi a piani inclinati, abbiamo considerato il movimento dei gravi per gli archi come un caso particolare della loro caduta verticale. Ma ancorchè queste considerazioni non sieno state esatte, e gli esperimenti stessi che abbiamo chiamato in ajuto sieno riusciti grossolani; pure ci aprirono la via a conoscere la dottrina dei penduli semplici, che si riducono in sostanza a punti materiali pesanti che scendono e si muovono per archi circolari. Di fatto si potè stabilire che la durata delle oscillazioni per archi minimi non dipende dalla loro ampiezza, ma dalla lunghezza dei penduli; giacchè questa rappresentando il raggio dell' arco che si descrive, la durata dell' oscillazione dev' essere proporzionale alla radice quadra della lunghezza dei penduli. E come il punto materiale oscilla in virtù della gravità, si ebbe il destro di valutare col pendulo una sì fatta forza accelerativa, e le sue variazioni sopra i varj punti della terra. Queste dottrine sono di tale momento, che veggendo noi il pendulo semplice essere ideale, fu nostra cura di ridurre per mezzo del centro di oscillazione i penduli composti a semplici, farne a quelli comuni le proprietà di questi, ed applicare i penduli composti agli orologi per cavarne esatta la misura del tempo. Dopo di che siamo progrediti alla teorica del moto curvilineo, combinando insieme la forza istantanea o d'impulso colla gravità sotto la scorta del paralellogrammo delle forze. Ma anche in questa parte

siamo proceduti di caso in caso, supponendo la forza diretta ad un centro, e considerando prima il moto dei projetti e poi il circolare.

Dichiarate le leggi secondo le quali operano la forza istantanea e la continua, ch'è la gravità, abbiamo ridotto in linee queste due forze, e dal loro rapporto ritratto la curva che il mobile in virtù dell'azione combinata di quelle due forze è venuto a descrivere, riducendola ad una parabola, e definito, tolta la resistenza dell'aria, la velocità del mobile, l'altezza del vertice, e tutte le altre proprietà del moto parabolico. Di modo che quasi agli occhi mostrammo che il moto parabolico da due movimenti rettilinei risulta, e in essi risolvesi, l'uno dei quali guida sempre il mobile per la tangente ad un punto qualunque della parabola, e perciò la forza istantanea prende il nome di *forza tangenziale.*

Ma di più si ampliarono le nostre idee nel contemplare i moti circolari che si eseguiscono per mezzo di una forza continua diretta al centro, e per mezzo della tangenziale che per cagion dell'inerzia si sforza di allontanare sempre il punto circolante dal centro. Chiamasi la prima *forza centripeta*, e nascendo dalla seconda lo sforzo del punto per allontanarsi dal centro, si distingue un sì fatto sforzo col nome di *forza centrifuga.* Or queste due forze sono contrarie ed eguali, e 'l punto circola con moto uniforme in mezzo all'azione di tali due forze che si contrastano e bilanciano.

Essendo eguali queste due forze, si possono facilmente apprezzare valutandosene la sola centripeta, la quale si può riguardare come costante in grandezza e direzione in un intervallo di tempo infinitamente piccolo. E però dall'archetto infinitamente piccolo, che il punto materiale descrive, si argomenta che in un istante, se la forza centripeta operasse sola, farebbe percorrere a quel punto mobile una retta eguale alla projezione dell'archetto infinitamente piccolo sul raggio o sia al seno verso di questo archetto. E siccome questo seno verso è eguale al quadrato dell'archetto diviso pel diametro; così ne risulta che la forza centripeta è proporzionale direttamente al quadrato della velocità, e reciprocamente al raggio del circolo che si descrive. È questo il valore delle due forze centripeta e centrifuga nel cerchio. Per lo che traducendosi questo valore della forza cen-

trifuga, si possono le forze centrifughe dei corpi circolanti altrimenti esprimere e ben comparare tra loro, dicendo che, dati tempi eguali, le forze centrifughe sono tra loro come i raggi dei circoli che descrivono, o pure posti eguali circoli in ragion reciproca dei quadrati dei tempi. Anzi aggiungendo alla considerazione del moto circolare due condizioni, l' una la massa del corpo circolante, e l'altra che i quadrati dei tempi periodici dei punti circolanti sieno come i cubi delle loro distanze dai centri di moto, abbiamo ricavato dalla prima che le forze centrifughe sieno proporzionali alle masse, e dalla seconda che con tale condizione le forze centrifughe sono reciprocamente proporzionali ai quadrati delle distanze.

Il movimento circolare ci servì di guida a conoscere quello per una curva qualunque. Poichè potendosi supporre che qualunque trajettoria si confonda in ciascun punto in una estensione infinitamente piccola col suo cerchio osculatore in questo punto; si può affermare che il mobile in un intervallo di tempo infinitamente piccolo si muova circolarmente intorno al centro di curvatura. Così in una curva qualunque si può misurare la forza centrifuga, come si fa nel cerchio, pel quadrato della velocità diviso pel raggio del cerchio osculatore; ma nel far questo passaggio sempre si pone che una delle due forze sia diretta a un punto fisso, o centripeta. Siamo quindi venuti da prima a ricercare quali sono le proprietà del moto per una curva qualunque che si fa, come nel cerchio, per una forza centripeta; e per trovar sì fatte proprietà ci furon bastevoli le dottrine della composizione delle forze e quelle del moto uniforme; perciocchè all' istante ci venne fatto di stabilire che le aree descritte attorno di un punto fisso dal raggio vettore di un punto materiale, sono proporzionali ai tempi impiegati a descriverle; e all' inverso, se queste aree sono proporzionali ai tempi, la forza che sollecita il mobile è diretta verso un punto fisso, o sia verso l' origine delle aree in tutti gl' istanti di moto. E da sì fatte proprietà si svolse la misura delle velocità effettive ed angolari in qualunque curva, facendo le prime reciprocamente proporzionali alle normali guidate dal punto fisso alle tangenti, e le seconde ai quadrati dei raggi vettori. Dal generale siamo di poi passati al particolare, e in luogo di una forza centrale qualunque abbiamo posto

quella che varia la sua intensità nella ragione inversa del quadrato della sua distanza dal punto fisso; e la geometria ci fece subito palese che la curva descritta dal punto mobile in virtù di questa forza dev'essere una delle coniche; ed all'inverso, se il mobile descrive una delle coniche, la forza che lo sollecita, è diretta ad un punto, e varia la sua intensità in ragione inversa del quadrato della distanza. Di modo che la ragione per cui il mobile deve una più presto descrivere che un'altra delle coniche, è tutta riposta nella quantità e nel valore della forza tangenziale. Fu in questo modo che da noi si comprese che il moto per la parabola o per l'iperbole, e quello ancora pel cerchio, il quale servì a noi di scala per condurci al moto in una curva qualunque per mezzo di una forza centrale, non sono che casi particolari di un'unica maniera di movimento. Si vide allora la ragione perchè stimandosi le velocità effettive per la ragione inversa delle normali guidate dal centro della forza sulle tangenti, debbono essere eguali nel cerchio e variabili nella parabola, nell'ellisse e nell'iperbole; e si conobbe da ciò che l'intensità della forza centrifuga dev'esser costante nel cerchio e variabile nelle tre altre curve, giacchè la forza centrifuga è proporzionale al quadrato della velocità diviso pel raggio del circolo osculatore, che varia ad ogn'istante nella parabola, nell'ellisse e nell'iperbole: l'uniformità in somma nel moto circolare e la variabilità nelle altre tre curve nasce dal medesimo principio e dalla medesima legge. Per lo che tutte le verità si legano tra loro: nel cerchio, in cui le due forze eguali e contrarie sono eguali, il punto che circola si tiene alla medesima distanza dal centro della forza, e nelle altre tre curve le due forze sono, egli è vero, contrarie, ma non eguali; e quindi il punto ora si allontana dal centro della forza ed ora gli si avvicina. Nella parabola e nell'iperbole il punto in un ramo si avvicina, perchè la centripeta prevale sulla centrifuga; ma perchè si avvicina, si aumenta la sua velocità, e si diminuisce la sua distanza dal centro della forza, e però prevale la forza centrifuga, e il punto mobile si allontana all'infinito percorrendo l'altro ramo della curva. Lo stesso avviene nell'ellisse; perchè il punto materiale si avvicina nel perielio al centro della forza, la centrifuga cresce a segno che il punto si deve

allontanare, e perchè si allontana la forza centripeta nell'afelio supera la centrifuga, e 'l punto si avvicina. La legge dunque è unica nel movimento che ha luogo nelle tre curve; ma nella parabola e nell'iperbole, che non sono curve chiuse, quando il punto mobile si allontana, la forza centrifuga decrescendo non mai giunge ad esser minore della centripeta; e nell'ellisse, che è chiusa, ora l'una ed ora l'altra forza prevale, e 'l punto mobile ora si avvicina ed ora si allontana girando. Di fatto nelle due curve chiuse circolare ed ellisse la totalità degli effetti è la stessa, e la somma delle velocità ineguali in un'ellisse è eguale alla somma delle velocità in un circolo, il cui diametro è eguale all'asse maggiore dell'ellisse. Per lo che quando la forza è unica, o sia produce lo stesso effetto nell'unità della distanza, i quadrati dei tempi periodici sono tra più ellissi, come i cubi dei grandi assi, nella stessa guisa che in più circoli i quadrati dei tempi periodici sono come i quadrati de' raggi. E parimente come nel circolo l'estremità dei diametri sono distanti tra loro per 180°, nella stessa maniera i punti degli apsidi sono tra loro alla distanza di 180°; ed operando costantemente la forza centrale nell'ellisse nella ragione inversa dei quadrati della distanza, la linea degli apsidi non è mobile, ma stazionaria.

In generale adunque un moto curvilineo, qualora il mobile non si muove per una curva a doppia curvatura, si riduce a due movimenti rettilinei, l'uno cagionato dalla forza istantanea o dalla velocità iniziale, e l'altro dalla forza continua. Dalla combinazione di queste due forze e di questi due movimenti risulta la forza centrifuga e centripeta. Questa in una curva conica varia la sua intensità nella ragione inversa del quadrato della distanza, ed in una curva qualunque è variabile, secondo una legge che dipende dal raggio di curvatura in ciascun punto. Ma i principj a cui si riferiscono queste dottrine sono l'inerzia, le forze proporzionali alle semplici velocità, l'equilibrio e 'l paralellogrammo delle forze; e i principj medesimi regolano tutta la dinamica, ch'è l'opera dei moderni, come si potrà meglio vedere dalla storia che qui da noi si va soggiungendo.

Sebbene alcuni veggano nell'amore e odio di Empedocle, che sono per questo filosofo i principj della formazione dell'universo, l'idea della forza centripeta e

centrifuga; e sebbene si sforzino altri di ritrarre da alcuni luoghi delle questioni meccaniche di Aristotile il principio delle celerità virtuali, quello del parallelogrammo delle forze e la teorica del moto curvilineo; pure è da confessarsi che le opinioni pubbliche intorno alla dinamica erano presso gli antichi erronee e manchevoli. Era presso loro famosa la distinzione di corpi pesanti e leggieri fondata sopra un certo *appetitus* che avevano alcuni corpi per portarsi al centro dell'universo o per fuggirne; e come se ogni movimento, che ha luogo in natura, non fosse naturale, divideano essi i moti in naturali e violenti, credendo naturali quei che nascono dall'essenza dei corpi, com'era il moto dei gravi verso il centro della terra, e l'altro circolare degli astri, che credeano di sua natura inalterabile. Violenti al contrario dicean quei moti che ripugnavano alla natura dei corpi, e che non poteano perdurare senza l'applicazione continua della forza motrice, com'eran quei dei projetti che supponeano incalzati dall'aria che loro imprimea nuovi impulsi. Ignoravano in somma le leggi del moto così semplice che composto, la teorica delle forze accelerative, e fuorchè le prime ed elementari nozioni del moto uniforme, non sapeano in che consistessero le leggi del movimento vario e quelle della comunicazione del moto, alle quali riduccsi veramente la meccanica. Ristette la dinamica in questo stato di debolezza sino al XVI secolo; e venerandosi i libri di Aristotile, come il sacro deposito della vera scienza, tutti occupavansi a comentare la di lui dottrina, e nuovi assurdi aggiungeano alla dinamica del greco filosofo. Volendosi determinare dai fisici in tal tempo il moto dei projetti, o delle palle spinte fuori del cannone per la forza della polvere, non furono pochi nè piccoli gli errori che ci recarono innanzi. Diceano alcuni che la palla descrivea una linea retta, finchè il suo movimento fosse distrutto, e poi si mettea a cader perpendicolarmente. Pensavano altri che da principio la palla descrivea una linea retta, poi, per cagione che il suo moto si rallentava, un pezzo di arco circolare, e finalmente ricadea per una retta perpendicolare. Questi erano i principj sopra i quali si fondava la teorica dell'artiglieria in quei tempi, e tranne un certo Giovan-Battista Benedetti, ch'ebbe alcune idee giuste intorno al moto nelle sue fisiche speculazioni re-

cate alle luce nel 1585, tutti erano smarriti e sognavano in meccanica. Fu Galileo l'onore e l'ornamento dell'Italia, il primo che gittò i sodi fondamenti della dottrina del moto, e da cui ebbe origine e cominciamento la dinamica. Appartenendo questo grand'uomo alla classe di quei che per la loro penetrazione sanno svelare i principj semplicissimi di cui usa la natura nella varia e pressochè infinita produzione delle sue opere, seppe e potè rintracciare la legge a norma di cui accelerano il loro moto i corpi abbandonati all'azione della gravità, e stabilì la teorica generale del moto uniformemente accelerato o ritardato, che poi in più ampia forma sviluppò il suo discepolo Torricelli nel 1644 in un'opera intitolata *De motu gravium naturaliter accelerato.* Ne fece la scoperta ponendo prima nella sua mente le leggi del moto uniformemente accelerato, e trovandole poi nella caduta dei gravi lungo dei piani inclinati, e dalla conformità tra la teorica e l'esperienza, che si rassodavano a vicenda, determinò le leggi della caduta verticale dei gravi, e quella lungo i piani inclinati.

Col favore di queste scoperte e coll'ajuto della geometria si rivolse ad altri due rami importantissimi del moto accelerato, cioè a dire al movimento dei penduli, e a quello dei projetti lanciati fuori della verticale. Supponendo che un corpo il quale si muove lungo di molte linee differentemente inclinate, o sia lungo una curva, ha sempre in fine della sua caduta la medesima velocità che avrebbe acquistato cadendo dalla medesima altezza perpendicolare, stabilì che la curva descritta dai projetti sia la parabola; che le projezioni fatte in virtù della medesima forza sotto angoli egualmente distanti da 45° hanno ampiezze orizzontali eguali; e che la massima ampiezza sia quella sotto un angolo di 45°; verità che già era stata conosciuta dal Tartalea, e di cui non sapeasi assegnare la ragione prima che Galileo non avesse dimostrato che l'ampiezza della parabola è come il seno del doppio angolo di elevazione. Tracciò con questi dati le prime linee della balistica, e dirizzò delle tavole in cui eranvi notate le portate e le altezze cui si elevano i projetti sotto qualunque angolo; tavole che furono poi perfezionate dal Torricelli per quei casi in cui la projezione non avesse luogo sopra un piano orizzontale, ma su di un piano inclinato all'orizzonte. Aggiungendo in

fine allo spirito geometrico quello delle osservazioni, si accorse delle oscillazioni di una lampada, e seppe dimostrare l'isocronismo dei penduli; e come due penduli di lunghezza ineguale faceano nel medesimo tempo un numero di vibrazioni che sono inversamente come le radici delle loro lunghezze; di modo che ritrovò nei penduli un metodo per estimare le altezze delle volte e delle torri, e quel ch'è più, uno strumento per misurare il tempo, ch'egli era già sull'applicare agli orologi, se la morte, che sopravviene sempre immatura per li grand'uomini, non glielo avesse impedito.

Nel dimostrare Galileo sì fatte verità ponea come certe le leggi primordiali del moto, e niun pensiero si dava di svilupparle. Cartesio al contrario nel medesimo tempo annunziava e dichiarava queste prime leggi, e tentava di raccoglierne i varj teoremi della dinamica. Ma diversa fu la sorte di questi due alti ingegni: Cartesio, smarrito dal suo sistema e dalla metafisica, spesso s'ingannò, come gli avvenne nell'assegnare le leggi della comunicazione del moto, o in altro; e Galileo, guidato dai fatti e ajutato dalla geometria, passava di una verità ad un'altra; sicchè esso riguardare meritamente si può come il fondatore della dinamica, e come quello ch'eccitò e ricondusse gli spiriti allo studio di questa nuova scienza. Indi è che dopo lui Baliani e Torricelli in Italia, Fermat Roberval in Francia, Wren e Wallis in Inghilterra, e tanti altri la dinamica illustrarono e si tolsero a coltivare. Un problema proposto dal P. Mersenne nell'anno 1646, e ch'è divenuto tanto famoso, quello cioè de' centri di oscillazione e di percossa, e l'invito che fece nell'anno 1661 l'Accademia di Londra ai meccanici per stabilire le leggi dell'urto e della comunicazione del moto, furono le occasioni e sono da riguardarsi come le prime cause degli ulteriori avanzamenti della dinamica. Hugenio, Wren e Wallis furono i tre che si divisero la corona che avea destinato l'Accademia di Londra a chi avesse scoperto le leggi della comunicazione del moto. Imperocchè tutti e tre battendo strade diverse giunsero contemporaneamente alla stessa meta, fissando le leggi a norma di cui il moto si comunica, ch'erano per lo innanzi ignote; e dall'accordo di questi tre meccanici si ebbe una prova di più della verità di quelle, e la dinamica si arricchì di metodi di-

versi e di nuovi principj. Il problema poi del centro di oscillazione e di percossa sebbene fosse stato il tormento dei più nobili ingegni, e lo scoglio in cui vennero meno Cartesio, Fabri, Roberval, Mersenne, ec., perchè confusero il centro di oscillazione con quello di percossa, nè seppero apprestarne una soluzione generale; pure fu con un principio nuovo la prima volta dichiarato da Hugenio, che signoreggiando in quei tempi sopra ogni altro meccanico, si può dire il promotore della dinamica dopo Galileo. Fu egli il primo che trovò nel pendulo il regolatore il più acconcio degli orologi, che il solo si divise con Hook la gloria di applicare la molla spirale a regolare il bilanciere delle mostre: egli discoprì la proprietà tautocrona della cicloide, e fornì soprattutto la teorica delle forze centrali nel cerchio. Poichè la forza centrifuga accennata dagli antichi, ben compresa da Cartesio e da Galileo tra i moderni, fu per la prima volta espressa, valutata e determinata da Hugenio, che la comparò colla centripeta, e la misurò nel movimento circolare.

Condotta a tale stato di aggrandimento la dinamica, non è da maravigliare se chiari compariscono in quei tempi Hook, Wren, Varignon, la Hire, Borelli, Amontons e tanti altri. Ma in mezzo alla folla di questi meccanici, sopra di tutti s'innalza Newton, il quale recando a perfezione i belli ritrovamenti di Hugenio, stabilì nell'anno 1687 col suo libro *Dei principj matematici* una nuova e più illustre epoca di cose, e fece, dirò così, una rivoluzione nella meccanica. Il moto curvilineo che era stato considerato da Galileo nella curva descritta dai projetti, o pure nel moto circolare da Hugenio, fu elevato da Newton a teorica; perciocchè riguardando ai belli teoremi sulle forze centrali nel moto circolare, ajutato egli dai nuovi calcoli e dalla sua profonda geometria, spiccò più alto il volo, e spiegò secondo quali leggi avesse luogo il movimento in ogni maniera di curva in generale. Non più considerò il moto uniformemente accelerato e ritardato, come è quello della gravità, ma un moto che varia secondo una legge qualunque; nè ebbe riguardo alla sola forza accelerativa, ch'è cagionata dalla gravità, ma ad ogni specie di forza accelerativa da cui potea avere origine e prodursi qualunque siasi movimento vario; sì che riducendo la dinamica alla

scienza di tutte le forze accelerative o ritardanti, e di tutti i moti varj che queste possono generare, estese non solo, ma diè compimento alla dinamica, la quale, come ognun sa, altro non è che la scienza delle forze accelerative o ritardanti, e dei moti varj che da esse produconsi. Il principio famoso che si chiama della *conservazione dello stato di moto o di riposo del centro di gravità*, fu annunziato sul cominciare dei principj matematici, e le più belle verità che riguardano il moto curvilineo, e tanto onore recano all'umano ingegno, furono la prima volta tutte dichiarate da lui. I teoremi delle aree proporzionali ai tempi in una curva qualunque descritta in virtù di una forza centrale, la legge della forza che varia nella regione inversa dei quadrati delle distanze, affinchè si descriva una curva conica, la quantità della forza uniforme da combinarsi colla centrale per tracciarsi una curva conica piuttosto che un'altra, il modo come opera la forza centrifuga nell'ellisse, e come la forza centrale ora vincendo la centrifuga, e ora da questa superata, mantiene costante il movimento ellittico, sono verità che valse Newton il primo a rivelarci. Dalle quali cose ben si comprende che la dinamica ebbe nascita, ingrandimento e perfezione da Galileo, Hugenio e Newton, i quali succedendosi in meno di un secolo stabilirono la sodezza di questa scienza.

Siccome Newton non adoperò che il metodo sintetico, e al più non fece uso che di quello delle serie; così tutti i geometri si rivolsero a generalizzare i di lui teoremi, ad esprimerli nei modi algebrici, e più d'ogni altro a tradurli nelle forme differenziali a norma dei calcoli ch'erano di recente inventati. Riferirono il moto di un corpo e le forze che operano tra loro a tre linee rette perpendicolari tra di esse, come si legge nella Meccanica di Eulero pubblicata nel 1736; e dalle variazioni delle coordinate raccolsero le rette trascorse nello spazio da un mobile animato da forze accelerative qualunque, siccome si vede nell'insigne *Trattato delle flussioni* del Maclaurin impresso nel 1742. E però dopo Newton avvenne per la dinamica ciò che accader suole nel progresso di tutte le scienze, cioè a dire, dopo che gl'inventori creano e formano la scienza, vengono appresso quei che la rendono più semplice e l'abbellisco-

no. Infatti al metodo sintetico, alle dimostrazioni spinose e indirette o di Hugenio o di Newton successero il metodo analitico, mezzi di dimostrare diretti, e principj più facili che meglio estendeano e propagavano la dinamica.

Concorse ancora all' accrescimento della dinamica il costume che aveano i meccanici in quei tempi di eccitarsi a nuove ricerche, proponendosi dei problemi o interamente nuovi, o che una volta proposti, non erano stati bene e generalmente dichiarati. Nasceva questa specie di duello letterario non solo dall' amore della gloria e dalla gelosia, che suole pungere e stimolare gli animi delle persone di lettere; ma ancora da ciò, che non essendovi allora metodi generali, e trovandosi il calcolo integrale sul nascere, come alcuno era in possesso di qualche principio o di qualche formola particolare, sospettava che gli altri giungere non potessero alla soluzione di alcuni problemi difficili della dinamica. La soluzione del problema del centro di oscillazione, ch' era stata già pubblicata da Hugenio, fu impugnata da più geometri, e sostenuta da Giacomo Bernoulli, il quale come era di gran sentimento nelle cose geometriche, seppe per mezzo del principio della leva recare innanzi un altro metodo di sciogliere il problema. Si accese perciò una gran contesa, e da ogni parte intesero i meccanici a rischiarare i due problemi dei centri di oscillazione e di percossa. Il marchese dell' Hopital avvertì nel 1690 che Bernoulli avea considerato le velocità dei corpi che operano, per finite e non per elementari, come dovea. E però venne questi riformando nel 1703 la sua soluzione, e la ridusse a quella generalità ed eleganza che maggiore si può. Poichè sciolse in qualunque istante il movimento di ciascun corpo del sistema in due altri: uno che il corpo prende realmente, l' altro ch' è distrutto, e dai movimenti distrutti determinò il movimento che restava ai corpi, e che di fatti pigliavano dopo la loro mutua azione. Sdegnarono di batter questa via Giovanni Bernoulli e Taylor, che nell' anno 1714 si riproposero il problema dei centri di oscillazione, e fu per loro l' occasione di una lunga disputa. Ma sebbene i principj da essi adoperati fossero ingegnosi e veri; pure la soluzione di Giacomo Bernoulli fu reputata la più degna del pregio, come quella che ridusse questo

problema ai principj della statica per mezzo dell' equilibrio dei moti distrutti.

Una delle controversie che levò gran romore tra i meccanici, e che ora è bandita, fu la misura delle forze nei corpi in moto, o sia la questione delle forze vive. Leibnizio valutava la forza del prodotto della massa nel quadrato della velocità, mentre tanti altri ostinatamente voleano apprezzarla pel prodotto della massa nella semplice velocità. Giovanni Bernoulli si tenne all' opinione di Leibnizio; e come Hugenio sciolto avea il problema dei centri di oscillazione per un teorema particolare, in cui dicea che nel moto dei corpi pesanti la somma dei prodotti delle masse pei quadrati delle velocità in ciascun istante è la medesima, sia che i corpi si muovano unitamente di una maniera qualunque, o ch'essi percorrano liberamente le medesime altezze verticali; così vide in questo teorema un principio generale, e una legge della natura ch'egli chiamò la *conservazione delle forze vive*. S' introdusse così un nuovo principio che valse a sciogliere alcuni problemi difficili, e si ebbe un altro metodo, secondo cui da alcuni è stata trattata la dinamica in quella parte che riguarda la mutua azione di un sistema di corpi in virtù di forze qualunque sieno.

Lungo sarebbe se qui rapportar si volessero tutti i problemi e tutte le contese che in varj tempi ebbero luogo tra i più illustri uomini, tra i Bernoulli, gli Euleri e Clairaut, dai quali gran profitto trasse la dinamica. Ebbero esse fine, come l'arte di risolvere i problemi fu ridotta a regole certe e stabili, o sia allorchè Alembert pubblicò la sua Dinamica nell'anno 1743. Poichè rese più semplice il principio con che Giacomo Bernoulli avea ritrovato i centri di oscillazione coi moti distrutti secondo i principj dell'equilibrio nella leva, l'espresse in una forma analitica, ed elevandolo a principio generale ne dichiarò tutta la dinamica. Si ebbe quindi un metodo diretto generale per mettere in equazione qualunque problema, tutte le leggi del moto dei corpi furono richiamate a quelle stesse del loro equilibrio, e la dinamica fu ridotta e consolidata colla statica.

Non gli fu difficile dopo ciò di affrontare il problema della precessione degli equinozi; di determinare il movimento di un corpo di figura qualunque animato da forze qualunque; di ricavare dal suo principio chiara

la dottrina dei tre assi principali di rotazione in un corpo, di quale che si fosse grandezza o figura, che ha avuto impresso un moto di rotazione, come già avea osservato Seguer nel 1755, e meglio sviluppato Alberto Eulero nel 1761; di vincere in somma la difficoltà di tanti nuovi problemi, e di estendere e amplificare la dinamica. Parea che la meccanica, fornita già di regole certe, di un metodo diretto e di un principio generale, fosse già arrivata alla conveniente altezza; quando La Grange colla sua Meccanica analitica nel 1788 la portò più innanzi, e in virtù del principio delle celerità virtuali nuova forza, più eleganza, maggiore generalità e chiarezza le somministrò.

Siccome l'applicazione del principio di Alembert spesso riusciva difficile, perchè determinar non si sanno le forze che debbono essere distrutte, e non di rado avviene che una soluzione ci presta molto lunga ed intralciata; così La Grange si pensò di unire al principio di Alembert l'altro delle celerità virtuali per sciogliere in un modo analitico e con somma prontezza le questioni di dinamica che, come si sa, riduconsi tutte a questioni di statica. Poichè supponendo un sistema di corpi in movimento, ove si riguarda il moto di ciascuno in ogni singolo istante, come composto di due, di cui l'uno è quello che il corpo avrà nell'istante che segue, è di necessità che l'altro sia distrutto per l'azione reciproca dei corpi, e per quella delle forze motrici di cui sono essi animati. Segnò egli e raccolse tutti questi moti perduti, ed estendendo al moto del sistema la formola del suo equilibrio, ci somministrò un metodo facile ed analitico per la soluzione di tutti i problemi della dinamica. Anzi venne dimostrando che dalla sua formola nascono e derivano i principj che per lo innanzi aveano adoperato i meccanici, com'è quello della *conservazione delle forze vive*, della *conservazione del moto del centro di gravità*, ec.; e sotto la sua formola si riuniscono la statica e l'idrostatica, la dinamica e l'idrodinamica, in modo che tutta la meccanica ridusse ad un'applicazione semplicissima di una sola formola e di unico principio. Non è quindi da prender maraviglia se in appresso Prony ridusse a tavole ragionate la dinamica, e pubblicò la sua *meccanica filosofica*, in cui segna il luogo che occupa la meccanica nel sistema delle nostre cognizioni, ci dà

a conoscere lo spirito dei metodi, la catena che lega tutti i teoremi, e mostra come in un quadro il disegno e 'l legame di tutta la scienza. Ma quel ch'è più, non è ora da prender maraviglia se, stabiliti i metodi generali ed analitici, siensi vinti dal La Place e da tanti altri colla forza dei calcoli i problemi più ardui e difficili della meccanica celeste; e se la teorica delle lamine e superficie elastiche e quella delle loro vibrazioni siesi fondata ed accresciuta, e tutto dì inventati nuovi calcoli, e ridotta la dinamica a principj chiari e semplicissimi, si vada in tutte le sue parti aggrandendo. Per lo che la dinamica inventata da Galileo, accresciuta da Hugenio, perfezionata da Newton, arricchita di nuovi principj e di altri metodi dai Bernoulli e dagli Euleri, ridotta a semplicità da Alembert, generalizzata e resa più nobile insieme e più facile da La Grange, e da tanti altri illustri geometri, sia al presente ornata, ordinata e abbellita dallo spirito filosofico che regola a' nostri dì ed anima tutte le scienze.

DELLA FISICA CELESTE

PARTE PRIMA

DEI MOVIMENTI APPARENTI DEI CORPI CELESTI

Potrà per avventura sembrare ad alcuno che non ben si conosce delle cose fisiche, che io per via lunga e disastrosa incamminandomi sia finalmente giunto alla spiegazione dei fenomeni celesti, i quali ai movimenti degli astri principalmente riduconsi, e formano nelle nostre lezioni quella parte della fisica che dicesi generale. E pure non è così, ove si pone mente che senza l' ajuto della statica e della dinamica, senza le leggi a norma di cui operano le forze istantanee e continue, o unitamente o separatamente, comprender non si possono i fenomeni celesti. Giacchè le masse planetarie si equilibrano nello stesso modo che si bilanciano tutti i corpi e tutti i punti materiali dell' universo; le forze che animano gli astri sospingono colle stesse regole invariabili ogni altro corpo in natura, e i movimenti planetarj risultano dalle stesse leggi generali, secondo cui si governa l' universo. Sappiamo in fatti dalla storia che i principali travagli dei meccanici sono stati diretti a favorire la dichiarazione dei fenomeni celesti, e gran parte dei più belli teoremi della meccanica non sono che risposte alle interrogazioni della fisica astronomia. Poichè questa ad altro non si riduce che ad un gran problema di meccanica, la cui soluzione si racchiude oggi nella famosa *Meccanica celeste* di de La Place, che si riguarda come il titolo più glorioso dell' altezza cui in questi ultimi dì è salito lo spirito umano. Lungi dunque di peccar noi per eccesso, quando abbiamo premesso la dinamica e la statica alla spiegazione dei fenomeni celesti, si può dire piuttosto che abbiamo mancato per difetto, non avendo potuto abbracciare la meccanica in tutta la sua estensione, perchè ristretti agli elementi, non abbiamo potuto adoprare quei calcoli, col cui ajuto si può solamente trattare in acconcio e degno modo la mec-

canica. Ciò non ostante preparati e fatti robusti dalle verità già da noi dichiarate, siamo ora in istato d'imprendere l'esposizione del sistema del mondo, e comprendere le leggi che regolano i movimenti principali del sistema planetario. Ed a ciò fare sarà nostro intendimento di esporre prima i fenomeni come si presentano ai nostri occhi, e poi ricavare dai moti appareuti i reali, e da questi, che sono i fenomeni certi, raccogliere le leggi cui essi moti sono invariabilmente sottoposti, per innalzarci in fine al conoscimento di una causa fisica che anima, agita e sospinge tutti i pianeti, che da noi è stata chiamata sulla terra *gravità*, e in tutti i corpi della natura *gravitazione* o *attrazione*. Ricavata così dai principali movimenti la causa fisica, questa andremo poi ritrovando giusta gl'insegnamenti dell'induzione in quei fenomeni che da principio o l'accennavano oscuramente, o pure faceano sembianza di contrastarla, e daremo in questo modo perfezione a quella parte della fisica che oggi chiamasi *Meccanica* o *Fisica celeste*. Di modo che il principio da noi recato sarà un fatto, e questo tutti i fenomeni spiegherà, per quanto si potrà da noi ridurre ad effetto in questi Elementi.

117. Prima di raccogliere dalle osservazioni i fenomeni celesti, è da notare che stando sulla terra ci pare di essere in riposo nel centro dell'universo, intorno a cui il cielo e con esso le stelle tutte nell'intervallo di un giorno e di una notte si muovono. Anzi ignorando la distanza che han le stelle da noi, tutte le vediamo egualmente lontane dai nostri occhi, e collocate le crediamo sulla superficie di una sfera di cui occupiamo il centro, e che gira intorno a noi. Ma per non ismarrirci nell'ampiezza di questa sfera ch'è senza limiti, abbiamo diviso e distinto il cielo in più piani o cerchi, cui rapportando gli astri, ci venisse fatto di conoscerne il cammino, la velocità, distanza e posizione. Cominciando infatti sempre dalla terra che abitiamo, si è da noi prolungato il suo asse dall'una e l'altra estremità colla nostra mente sino al cielo, e si è posto a questa linea ideale il nome di *asse del mondo*, com'è l'asse PP' (*fig.* 30), il quale passando pel centro della terra va a terminare ai confini dello spazio. I punti P e P', intorno ai quali, restando essi immobili, ci pare che gira tutto il cielo in un giorno, si chiamano i *poli del mondo*,

dei quali l'uno, che da noi abitanti dell'Europa si vede, dicesi *Polo artico*, *boreale* o *settentrionale*, e l'altro opposto *Polo antartico*, *australe* o *meridionale*. Il primo circolo a cui riferisconsi le stelle, e che da noi si concepisce nello spazio, è quello notato colle lettere *EE*, che ha per centro il centro stesso della terra *T*, è perpendicolare all' asse del mondo, divide la sfera in due parti eguali, nell' emisfero cioè settentrionale e meridionale, e dicesi *Equatore*. L'altro cerchio, che serve a distinguere il moto dei corpi celesti, ha pure per centro il centro della terra, passa per li poli *PP'* del mondo, taglia ad angoli retti l'equatore, divide la sfera in due eguali emisferi, l' uno orientale e l' altro occidentale, e si chiama *Meridiano*. Finalmente siccome lo spettatore posto sulla superficie della terra non vede che la metà dei cieli, così il cerchio *DD'*, che nella sfera celeste separa la parte visibile dall' invisibile, si nomina *Orizzonte*, il quale si distingue in *razionale* e *sensibile*. Si concepisce il primo guidando da *T* la verticale *TZ*, che andrà a segnare in alto il punto *Z*, che si chiama *Zenit*, cui, prolungata al di sotto di *T* la verticale, corrisponde all'opposto l'altro punto nominato *Nadir*. Ora l' orizzonte razionale ha per centro il centro stesso della terra, ed ha i suoi poli nello zenit e nel nadir. Il secondo è paralello al primo, ha per centro l'occhio dello spettatore posto in un punto qualunque della superficie della terra, e limita ai nostri occhi la parte visibile del cielo, che a noi comparisce a guisa di una volta concava e schiacciata.

118. L' orizzonte è quello che determina lo spuntare e il tramontare degli astri; perciocchè essi cominciano a vedersi da noi quando s' innalzano sull' orizzonte, e perdonsi di vista ove sotto discendono. Così una stella spunta in *B*, e tramonta in *A*, e quella parte del cielo segnata da *REI'* ec., da cui ci accorgiamo che gli astri montano sopra l'orizzonte, si chiama *orientale*, e l'altra opposta *AEI*, in cui pare a noi che si abbassano sotto l' orizzonte, *parte occidentale*. E siccome la linea che divide in due parti eguali la distanza tra i punti orientali e occidentali degli astri, o sia l' arco che le stelle descrivono sopra l' orizzonte, è un meridiano che passa per li poli del mondo e per lo zenit o verticale dello spettatore; perciò gli astri giungono alla loro massima

altezza sopra l'orizzonte quando arrivano elevandosi al meridiano, e pervengono allo zenit dello spettatore. La più parte degli astri in virtù del loro moto giornaliero descrivono dei piccoli cerchi, i quali, come quelli che sono paralelli all'equatore, diconsi *paralelli*, i cui diametri sono tanto più piccoli quanto più si discostano dall'equatore e avvicinansi ai poli. Di fatto paralelle sono tra loro le corde *ba*, *RZ*, *BA*, ec. Camminando in fine sulla superficie della terra, la parte visibile del cielo va cangiando ai nostri occhi, perchè l'orizzonte sensibile muta di posizione; e a misura che ci avviciniamo ai poli della terra pel cangiamento di posizione dell'orizzonte il quale si abbassa, pare a noi che il polo del mondo s'innalzi; indi è che nei varj punti della superficie della terra e per li diversi paesi della nostra abitazione il polo ci sembra di essere più o meno alto. Quest' altezza del polo si misura dall'arco interposto al polo e all'orizzonte, o sia dall'angolo *PTD*, che per Palermo è di 38° 6′ 44″, e deriva da una sì fatta altezza del polo, che alcune stelle per noi non ispuntino nè tramontino, ma sempre ci sieno visibili, perchè compiono il loro giro intero sopra l'orizzonte, come sarebbe una stella che percorresse il cerchio *ba*, o come di fatti sono per noi la polare e le stelle dell'orsa maggiore. In questo modo, e coll'artifizio di questi cerchi con cui abbiamo distinto il cielo, ci accorgiamo che le stelle, senza mutare la loro rispettiva distanza, girano con tutta la sfera in un giorno sopra due punti fissi che sono i poli, e ne misuriamo l'altezza e la loro elevazione sopra l'orizzonte. Ma da questo spettacolo del cielo, ch'è molto generale e pieno di confusione, dobbiamo rivolgerci a contemplare quei corpi celesti che più colpiscono la nostra vista, e che coi loro movimenti ci possono innanzi d'ogni altro mostrare i principali fenomeni del cielo. Indi è che daremo principio all'esposizione dei moti apparenti degli astri dal moto del sole, che ci porta il giorno ed è a noi più sensibile.

CAPO PRIMO

DEL MOVIMENTO DEL SOLE.

119. Chiunque si mette in ogni giorno ad osservare il punto da cui il sole s' innalza sopra l' orizzonte, e quello in cui tramonta, si accorge che l' uno e l' altro va sempre cangiando. Il punto da cui spunta il sole a cominciar di marzo è diverso, e si va sempre avvicinando verso il polo settentrionale sino al mese di giugno, e poi ritorna in dietro con un moto retrogrado sino alla fine di dicembre. Vario del pari è nei giorni diversi il punto cui il sole s' innalza sopra l' orizzonte, e la sua altezza è massima nella state, minima nell' inverno. Basterebbe questa prima grossolana osservazione per mostrarci che il sole, oltre al moto giornaliero di oriente in occidente che ha in comune con tutto il cielo, è fornito di un movimento proprio, se ulteriori osservazioni meglio e più chiaramente non ce lo indicassero. Ci è noto dalle osservazioni che il sole ora si avvicina alle stelle che sono fisse, ed ora da esse allontanasi; anzi è certo che quegli astri i quali in alcuni giorni tramontano dopo il sole, si veggono nei giorni d'appresso spuntare prima del suo nascere. Di che ben si argomenta che il sole si muove, e 'l suo movimento proprio si fa in senso contrario al giornaliero, o sia d' occidente in oriente; altrimenti succeder non potrebbe che le stelle, le quali oggi tramontano dopo il sole, vengano nei giorni d' appresso a spuntar prima. Non sono le stelle le quali eran dopo, che si mettono innanzi, ma il sole il quale era innanzi, che si mette dopo, movendosi in senso contrario alle stelle, o sia di occidente in oriente. Oltre di che, siccome il sole passa al meridiano ora più tardo e ora più presto delle altre stelle; così da questa differenza di tempo si è determinato con esattezza il suo movimento in senso contrario a quello giornaliero. Anzi vedendosi che il sole in ogni anno ritorna vicino alle medesime stelle, e nelle stesse posizioni nei tempi stessi determinati in cui trovavasi negli anni passati, si è stabilito che il sole, oltre al moto giornaliero comune a tutto il cielo, ha un movimento proprio; che questo

moto del sole si dirizza di occidente verso l'oriente in senso contrario al suo moto giornaliero, e che in virtù di questo moto compie una intera rivoluzione in un tempo determinato che si chiama *anno*. Per lo che riguardando alle stelle che il sole va raggiungendo, e lungo cui esso si muove, si è potuta stabilire una serie di punti nel cielo, che formano un cerchio chiamato l'*ecclittica*, com'è il circolo gG' (*fig.* 30), e cc' (*fig.* 32). L'ecclittica adunque non è altro che il sentiero che batte il sole col suo apparente annuale moto, sentiero ch'è inclinato all'equatore sotto un angolo che varia di molti minuti in un secolo, e che al cominciar del 1821 era 23° 27′ 57″. Di modo che il movimento del sole non è esattamente diretto di occidente in oriente, ma dentro certi limiti determinati alquanto ne devia. Ciò non pertanto l'ecclittica è un circolo massimo della sfera che ha per centro il centro della terra, i cui poli sono HH' (*fig.* 32).

120. Egli è chiaro dopo ciò, che il sole mentre cammina nell'ecclittica col suo movimento proprio di occidente in oriente, è trasportato con tutta la sfera d'oriente in occidente, spuntando e tramontando, facendo una rivoluzione diurna. Ma come si avanza sull'ecclittica percorre il domani un altro paralello col moto comune a tutta la sfera, spunta da un altro punto dell'orizzonte, e giunge al meridiano in un'ora diversa, e si eleva ad un'altezza diversa. Così percorrendo cEc' (*fig.* 32) descrive col moto diurno i paralelli $t'c$, $q'q$, $c't$. Comparisce in somma di esser fornito di due movimenti proprj, l'uno paralello e l'altro perpendicolare all'equatore, mentre in sostanza ne ha un solo ch'è obbliquo ai meridiani ed ai paralelli.

121. Si può ora comprendere in che modo abbian luogo le stagioni diverse. Movendosi il sole sull'ecclittica taglia l'equatore in due punti che si chiamano gli *equinozj*. Imperocchè ove il punto dell'orbita del sole *coincide* coll'equatore in quel giorno, il sole è obbligato in virtù del suo moto diurno a percorrere l'equatore. E come l'equatore è tagliato dall'orizzonte per ciascun punto della terra in due eguali parti; così il sole percorrendo in un giorno l'equatore sta tanto sopra quanto sotto l'orizzonte, e viene il giorno eguale alla notte. Il primo equinozio succede verso la costellazione di ariete,

e dicesi *equinozio di primavera*. A misura che il sole si avanza sull'ecclittica va percorrendo col suo moto diurno diversi paralelli all'equatore; e come per noi il polo settentrionale è innalzato sopra l'orizzonte, così gli archi visibili dei paralelli diversi che stan sopra l'orizzonte sono più grandi di quelli che sono invisibili e trovansi al di sotto; e però il sole come va percorrendo paralelli diversi sta più sopra che sotto l'orizzonte, e i giorni si van facendo più lunghi delle notti. Giunto il sole alla massima distanza dall'equatore, percorre il paralello gg' (*fig.* 30) che dicesi il *tropico di state*, o per la vicina costellazione di cancro il *tropico di cancro*. Allora succede il giorno più lungo dell'anno, perchè l'arco visibile di questo paralello è il più grande di tutti gli altri, e la durata dei giorni in tal punto è quasi la stessa per la ragione che l'ecclittica gG' essendo tangente al circolo gg', il sole fa sembianza di percorrere per qualche tempo il medesimo cerchio diurno, e però dicesi *solstizio di state*. Da questo punto torna l'astro verso l'equatore percorrendo gli stessi paralelli col suo moto diurno, e quindi i giorni van facendosi più brevi, finchè giunto all'equatore verso la costellazione di *libra* succede di nuovo l'*equinozio* che chiamasi di *autunno*. Da lì il sole si va allontanando dall'equatore, e avvicinandosi verso il polo meridionale, ch'è per noi situato sotto il nostro orizzonte: il sole quindi va percorrendo dei paralelli ogni giorno, i cui archi visibili per noi sono sempre decrescenti, e minori degl'invisibili, e perciò i giorni diventano più brevi delle notti, finchè giunge al paralello GG', che dicesi il *tropico d'inverno*, e per la vicina costellazione di capricorno il *tropico di capricorno*. Allora avviene la notte più lunga, l'ecclittica è tangente al tropico, e si ha il *solstizio d'inverno*. Da questo tropico si volge il sole verso l'equatore, e ripigliando la sua nuova rivoluzione, torna all'equinozio di primavera. Ora il sole col corso inalterabile nella sua annua rivoluzione forma nei due equinozj e nei due tropici le quattro e regolari e costanti stagioni dell'anno. L'intervallo che passa tra l'equinozio di primavera e 'l solstizio di state forma la *primavera*, e 'l tempo che al presente impiega il sole a percorrerla è di $92^g\ 21^o\ 16'$. L'intervallo tra il solstizio di state e l'equinozio di autunno dicesi *state*, e questa stagione si percorre dal sole

in 93g 13° 52′. Chiamasi *autunno* l'intervallo compreso tra l'equinozio d'autunno e 'l solstizio d'inverno, e 'l tempo di questa stagione è 89g 17° 8′. Finalmente l'*inverno* ha luogo tra il solstizio d'inverno e l'equinozio di primavera, il cui intervallo si trascorre dal sole in 89g 1° 31′. Ma questa ineguaglianza nella durata delle stagioni non sarà sempre la stessa.

122. Le diverse altezze del polo in differenti punti della terra producono nelle stagioni quelle varietà notabili che si osservano andando dall'equatore ai poli. Per gli abitanti dell'equatore i poli sono nell'orizzonte, che taglia tutti i paralelli per metà; e però tutti i giorni sono eguali alle notti, e due volte l'anno il sole passa per lo zenit, perchè ne' due equinozj si trova sull'equatore. Le altezze poi meridionali del sole sono nei solstizj le più piccole, ed eguali a 66° 32′ inclinazione dell'asse terrestre sopra l'ecclittica, o sia $= PTg$ (*fig.* 30); ma crescono come il sole si va avvicinando all'equatore, dove l'altezza è 90°. Le ombre si dirizzano sei mesi verso il polo nord, e altri sei verso il polo sud, e l'ombra meridiana si va accorciando come il sole si avvicina all'equatore dove è nulla. Per lo che si potrebbe dire che sotto l'equatore vi hanno due stati e due inverni in ciascun anno; le due stati han luogo dagli equinozj ai tropici, e i due inverni dai tropici agli equinozj. E queste vicende di stagioni succedono quasi egualmente, e con piccola differenza nei paesi che sono vicini all'equatore, e in generale in quei in cui l'altezza del polo è meno dell'obbliquità dell'ecclittica; perciocchè tutti questi paesi compresi tra i due tropici hanno due volte l'anno il sole a mezzogiorno perpendicolare alla loro testa, o sia al zenit, e comprendono la *zona* che si dice *torrida*. Al di là de' tropici non vi ha più che una state ed un inverno, perchè il sole non giunge mai allo zenit. I paralelli son tagliati inegualmente dall'orizzonte; e però tutti i giorni dell'anno sono ineguali, eccettuati due, nei quali il sole corrisponde all'equatore; il giorno più lungo è quello del solstizio di state, e il più corto è quando il sole si trova nel solstizio d'inverno. Ma la differenza della durata dei giorni e delle notti è diversa secondo la diversa altezza del polo. In fatti per quei popoli che sono più lontani dall'equatore, che noi non siamo, la durata del giorno più lungo è più della

nostra, per la ragione che l'arco visibile del tropico di cancro per essi è più che non è per noi. Anzi per quei che veggono tutto il tropico sopra l'orizzonte, il sole non tramonta nel solstizio di state, e in corrispondenza non ispunta nel solstizio d'inverno, perchè questo tropico resta allora invisibile e sotto l'orizzonte. E così di mano in mano avvicinandosi ai poli della terra cresce la durata del giorno più lungo, e della notte più lunga. Finalmente sotto il polo l'equatore si confonde coll'orizzonte, e 'l sole sta sei mesi sopra e sei mesi sotto l'orizzonte, perchè metà dell'ecclittica è sopra e metà sotto l'orizzonte; di modo che non vi ha che un giorno ed una notte in un anno per i paesi situati sotto i due poli. Ma la notte di sei mesi vien diminuita dalla presenza del sole prima d'innalzarsi sopra l'orizzonte, e dopo di essere alquanto disceso al di sotto; perciocchè la luce, che si riflette e si rifrange nell'atmosfera, forma di lunga durata quel chiarore che dicesi *crepuscolo.* Ora queste parti della terra che son comprese tra i tropici e i *circoli polari*, che sono distanti per 23° 28′ dal polo, formano le *zone temperate*, e le altre che restano intorno ai poli si distinguono col nome di *diacciate.*

123. Osservando attentamente il movimento del sole nella sua annua rivoluzione, si è veduto che gl'intervalli che separano gli equinozj dal solstizio non sono eguali. Poichè l'intervallo tra l'equinozio di primavera e quello di autunno è presso a sette giorni più lungo dell'altro che corre tra l'equinozio di autunno e quello di primavera. Anzi da replicate e diligentissime osservazioni si è ricavato che il sole descrive in un giorno 61′,165 presso il solstizio d'inverno, e solamente 57′,192 verso i punti della sua orbita, che sono presso il solstizio di state. Per lo che si è conchiuso che il moto proprio del sole non è uniforme; e pigliando la media tra la sua massima e minima velocità, si è determinato che il moto giornaliero del sole varia di 0,336 del suo moto medio. Sonosi oltre a ciò accorti gli astronomi che quando la velocità del sole è massima il suo diametro apparente è di 32′,593, quando è minima il suo diametro comparisce di 31′,516. E sebbene questa differenza tra i diametri apparenti sia piccola, pure basta a dimostrarci che il sole non si muove in un cerchio, ma sia ora più ora meno distante dalla terra; giacchè i diametri appa-

renti sono in ragione inversa della distanza. Si distingue quindi il punto della massima distanza del sole dalla terra col nome di *apogeo*, e quello della minima coll' altro di *perigeo;* e si colloca il primo nel solstizio di state, e 'l secondo nel solstizio d' inverno, perchè in quel solstizio si ha il minimo diametro apparente, in questo il massimo.

124 Nè si può supporre che gli archetti descritti dal sole in un giorno nell' apogeo e nel perigeo, sieno eguali, ma ci compariscano ineguali a cagione della sola differenza della distanza. Poichè se ciò fosse, il rapporto degli archi descritti dovrebbe essere eguale, e non già maggiore com' esso è, a quello dei diametri apparenti, o sia a quello inverso delle distanze. Difatto la frazione $\frac{61165}{57192}$ è eguale al quadrato della frazione $\frac{32593}{31516}$; o sia il rapporto degli archi percorsi è eguale non già al semplice rapporto, ma al quadrato del rapporto inverso delle distanze.

125. È dunque da ammettersi un ritardo reale nel moto del sole a misura che si allontana dalla terra, ed un'accelerazione quando si avvicina, ed il sole ora più lentamente ed ora più rapidamente si muove nella sua orbita.

Non essendo il moto del sole uniforme, nè la sua orbita circolare, pare che questa debba tenersi per ellittica. Poichè combinandosi il ritardo della velocità coll' aumento della distanza, egli è certo, pel num. 105, che il suo moto angolare diminuisce come il quadrato della distanza aumenta, ed all' inverso cresce come questo quadrato diminuisce; di modo che il suo moto angolare moltiplicato pel quadrato della distanza, o sia del raggio vettore, ci dà il medesimo costante prodotto in tutta l' estensione della sua orbita. Di fatto dalle osservazioni si raccoglie che il settore descritto dal raggio vettore del sole in un giorno è proporzionale al prodotto del quadrato di esso raggio pel moto giornaliero apparente del sole, ed è costante com' è costante questo prodotto presso a poco in un giorno. Il sole adunque (num. 101) descrive aree proporzionali ai tempi, e si muove in virtù di una forza centrale, come ha luogo in un' ellisse.

126. Guidati da questo ragionamento possiamo rap-

presentare l'orbita del sole o sia l'ecclittica in un'ellisse (*fig.* 33). $D\Upsilon C$♎ è l'equatore, $A\Upsilon P$♎ è la curva ellittica o sia l'ecclittica, e T la terra che è collocata in uno de' fuochi dell'ecclittica; A è l'apogeo, P il perigeo, e ATP la linea degli apsidi. La curva ellittica taglia l'equatore sotto un angolo di $23^\circ\ 28'$ per la retta ♈♎, i cui estremi son gli equinozj, distanti tra loro di 180°. Il sole è nel perigeo P verso il solstizio d'inverno, nell'apogeo A verso quello di state, nell'equinozio ♈ verso il fine di marzo, e nell'altro equinozio ♎ verso il fine di settembre. Partendo dalla linea ♈♎ degli equinozj si tengono le due metà dell'ecclittica divise in sei parti eguali, ciascuna di 30°, che si chiama *segno*. Lo *zodiaco* è una zona celeste che porta nel suo mezzo l'ecclittica, ed è terminata da due circoli paralelli all'orbita del sole, i quali ne son distanti dall'uno e dall'altro lato di 9°. I segni che determinano le dodici divisioni eguali sono l'ariete ♈, il toro ♉, i gemelli ♊, il cancro ♋, il leone ♌, la vergine ♍, la bilancia ♎, lo scorpione ♏, il sagittario ♐, il capricorno ♑, l'anfora ♒, i pesci ♓.

127. Or dagli angoli descritti in ciascun giorno dal raggio vettore del sole si è calcolata la sua distanza da T; perciocchè chiamando r, r' i due raggi vettori, ed a, a' i due angoli diurni corrispondenti, si ha (numero 125) $ar^2 = a'r'^2$, o sia $\frac{r}{r'} = \sqrt{\frac{a'}{a}}$. In questo modo si è calcolata la distanza del sole pel primo giorno di ciascun mese (Vedi Francoeur, *Uranografia*, n. 39), e si è determinata la sua grande distanza $TA = 1{,}0168$, e la più piccola $TP = 0{,}9832$, pigliando per unità la distanza media, o sia la metà di AP. Stabilite sì fatte distanze per mezzo del calcolo, sonosi rivolti gli astronomi alle osservazioni, ed han veduto che le distanze osservate corrispondono alle calcolate, e che i luoghi del sole nel suo corso si adattano bene alla curva ellittica da noi indicata. Di fatto le tavole di Delambre, che sono state condotte a quella perfezione che maggior si può, ci danno a vedere delle differenze di pochi secondi, che trar possono origine, come si dirà più innanzi, dalle perturbazioni cui è sottoposto il moto del sole per l'azione dei pianeti. Si è quindi convenuto cho l'orbita del sole sia presso a poco un'ellisse, di cui la terra oc-

cupa uno de' fuochi (Vedi Biot, *Astron. Fis.*, tomo II, l. 2, cap. 7).

128. Ma sebbene l'orbita solare sia sensibilmente ellittica, pure si avvicina assai alla circolare; perchè la sua *eccentricità*, che risulta dalla semidifferenza tra le distanze dell'apogeo e perigeo, è 0,0168, o sia corrisponde a censessantotto diecimillesime parti della distanza media, ch'è la metà del grande asse. E come quanto è più piccola l'eccentricità, tanto più l'ellisse si avvicina al circolo; perciò l'orbita solare non molto si differisce da quella di un cerchio. Ma nel cielo, in cui la distanza perigea è 33925512 leghe, l'apogea 35085432, e la media 34505472, questa piccola eccentricità ha più di 50 mila leghe di lunghezza. Si è disputato tra gli astronomi se una sì fatta eccentricità stia sottoposta a qualche variazione, ed oggi è fuor di dubbio che abbia una diminuzione lentissima che sia periodica.

129. Correndo il movimento del sole agli occhi di tutti, se ne ha ritratta la misura del tempo. Dalla sua rivoluzione diurna se n'è formato il giorno, che si misura da due passaggi consecutivi del sole al medesimo meridiano, e si computa dagli astronomi di una all'altra mezzanotte. Questo giorno si divide in 24^{ore}, un'ora in 60′, un minuto primo in 60″, ed un secondo in decimi. Dalla rivoluzione del sole nella sua orbita si è stabilito l'anno, che comincia dall'equinozio di primavera e finisce al ritorno del sole al medesimo equinozio, che dicesi *anno tropico* o *civile*, è di 365g 5° 48′ 48″, che per gli usi civili si computa dal primo di gennajo. Cento anni in fine formano il secolo, che per noi è il periodo più lungo.

130. Siccome l'intervallo tra due mezzodì consecutivi si chiama giorno *astronomico* o *solare*; così l'intervallo tra due passaggi di una stella qualunque al medesimo meridiano si dice *giorno sidereo*, e questo nasce dal moto che ha tutta la sfera in 24° da oriente in occidente. E nella stessa guisa la durata dell'intervallo tra due ritorni consecutivi del sole a una medesima stella, che ha luogo pel moto proprio del sole nella sua orbita, si chiama *anno sidereo*, ch'è di 365g 6^{or} 9′ 11″,7.

131. Comparando insieme il giorno astronomico e sidereo, si vede chiaramente che non sono eguali. Imperocchè la stella ritorna al medesimo meridiano nel me-

desimo intervallo di tempo, perchè essa non ha alcun moto proprio, e si muove costantemente con tutta la sfera. Ma il sole oltre al moto comune con tutta la sfera ha un moto proprio in senso contrario al suo moto diurno (num. 119), o sia d' occidente in oriente, per cui non può nè ritorna mai al meridiano nel medesimo tempo. Indi è che la durata del giorno sidereo è costante, e quella del giorno astronomico va sempre ritardando. Di fatto le stelle giungono al meridiano quasi 4′ prima del sole in ciascun giorno, e dopo un anno son passate una volta di più al meridiano, che non ha fatto il sole. Nè il sole percorre ogni giorno nella sua orbita uno spazio eguale, ma ora si muove più presto e ora più tardo, per cui giunge al meridiano in un giorno più in un altro meno lentamente, o più tardo. E da ciò nasce non solo una differenza tra il giorno sidereo e l' astronomico, ma tra i giorni astronomici tra loro. Finalmente influisce all' ineguaglianza dei giorni astronomici e di questi coi siderei la posizione obbliqua dell' ecclittica in riguardo all' equatore. Imperocchè computandosi il giorno astronomico e sidereo dal ritorno della stella o del sole al medesimo meridiano, si valuta il loro moto sopra un paralello, o sia nel senso dell' equatore. A tale oggetto si tirano dagli astronomi due meridiani per le due estremità dell' arco descritto dal sole sull' ecclittica in un giorno, e l' arco dell' equatore intercetto tra questi due cerchi determina e rappresenta il moto giornaliero del sole rapporto all' equatore. Così nella *fig.* 32 sia *EB* l' arco dell' ecclittica trascorso dal sole in un giorno, i due cerchi saranno *PBA*, *PE*, e l' arco *EA* dell' equatore *QQ* esprimerà il moto del sole rapportato all' equatore, e il tempo che impiega l' arco dell' equatore *EA* a passare pel meridiano rappresenterà l' eccesso del giorno astronomico sopra il sidereo. Ora quest' arco dell' equatore, che rappresenta il movimento del sole sull' ecclittica in ciascun giorno, è ineguale, perchè diversa in ogni giorno è l' inclinazione degli archi dell' ecclittica sopra l' equatore. Negli equinozj si vede chiaro che *EA* è più piccolo dell' arco dell' ecclittica *EB*; ma nei solstizj verso *c′* ossia *c* gli archi dell' ecclittica e dell' equatore intercetti dai meridiani sono presso che eguali e paralelli. Di che viene che sebbene gli archi percorsi dal sole in ciascun giorno si supponessero egua-

li; pure i giorni astronomici a cagione dell' obbliquità dell' ecclittica risulterebbero sempre ineguali. Dalle quali cose tutte riesce a chiunque manifesto che quantunque i giorni solari si dividono tutti in 24^{ore}, pure non sono eguali, eguali non sono le ore loro, e che eccettuati i solstizi, il mezzogiorno non è mai precisamente alla metà del giorno.

132. Se poi ci rivolgiamo a confrontare l' anno tropico e sidereo, troveremo che questo è più lungo di quello. Imperocchè i punti degli equinozj, come meglio si dirà più innanzi, hanno un movimento retrogrado sull' ecclittica, e contrario a quello del sole, per cui avviene che partendosi il sole dall' equinozio di primavera in questo anno, dopo aver trascorso la sua orbita, ritorna all' equinozio di primavera nell' anno venturo in un punto dell' ecclittica situato un poco prima, che non è quello dell' anno presente; e così l' anno tropico, che si compie dal ritorno del sole all' equinozio, si perfeziona prima che il sole abbia trascorso tutta intera la sua orbita, o sia è più corto del suo tempo periodico. Ora l' anno sidereo è eguale al tempo periodico del sole, perciocchè vuole il ritorno del sole (num. 130) alla medesima stella, o sia al medesimo punto della sua orbita: l' anno dunque sidereo è più lungo del tropico, e secondo i calcoli degli astronomi la durata del primo sopra quella del secondo si valuta 20′ 25″.

133. Gli astronomi alla vista di tante ineguaglianze si avvisarono di ridurre equabile il moto del sole. A ciò fare immaginarono un secondo sole che unitamente al vero sole camminasse sull' ecclittica con un moto uniforme, percorrendo in ogni giorno archi eguali di 59′,13883, e in modo che l' uno e l' altro passino nei medesimi istanti pel grande asse dell'orbita solare. Partendosi adunque insieme da *A* (*fig.* 33) il sole fittizio avanzerà il vero, perchè questo trovandosi all' apogeo ha un moto più lento. Ma a poco a poco andrà crescendo la velocità del sole vero, e questo andrà avvicinandosi al sole fittizio, finchè giungono insieme al perigeo in *P*. Di nuovo partendosi insieme da questo punto il sole vero, come più veloce andrà avanti al fittizio; ma come quello va perdendo della sua velocità, e questo la mantiene sempre eguale; così a poco a poco va diminuendosi la differenza tra l' uno e l' altro, e ambidue giungono nel

medesimo tempo in A. Ora l'arco che separa questi due soli nel loro cammino fuori dei punti A e P si chiama *equazione al centro* o *dell'orbita;* giacchè gli astronomi chiamano *equazione* i numeri che sono da aggiungersi o da sottrarsi ai valori medii per ottenere i veri. Ma sebbene il movimento del sole fittizio sia equabile; pure i giorni astronomici a cagione dell'obbliquità dell'ecclittica (num. 131) risultano ineguali. E però gli astronomi finsero un terzo sole, che si muove con moto uniforme sull'equatore, in modo che ambidue i soli fittizj si trovino negl'istessi istanti nei punti equinoziali. In questo modo il sole fittizio, che si muove con moto uniforme sull'ecclittica, divide questa curva nelle parti eguali Ao, ol, lm, ec., e 'l terzo sole, che si muove sull'equatore DC, percorre gli stessi eguali archi; perchè $\Upsilon a = \Upsilon a'$, ed $\Upsilon b = \Upsilon b'$, ed $\Upsilon c = \Upsilon c'$, ec.; e così il terzo sole arriva all'equatore in K', quando il secondo è nell'ecclittica in K, e quello giunge in i', a', b', c', quando questo è in i, a, b, c, ec. Il moto quindi del sole si computa così sull'equatore, si riduce ad uniforme, e si libera da tutte le irregolarità di cui è affetto il sole vero nel suo movimento proprio. Dopo di che è facile il comprendere che il ritorno al medesimo meridiano del sole che cammina sopra l'equatore percorrendo per ciascun giorno 59',13883 forma il *giorno medio astronomico*, e il tempo che si misura da questi ritorni eguali si dice *tempo medio*, a differenza del *tempo vero*, che si misura dal ritorno del sole vero al meridiano, il quale è vario per ciascun giorno. Il primo è segnato da un orologio ben regolato, e il secondo è indicato da un orologio solare.

134. Ora comparando il movimento del terzo sole sull'equatore, e quello del sole vero sull'ecclittica per ciascun giorno, si osserva che il primo ritorna nello stesso tempo ad un meridiano, e l'altro ora prima ed ora dopo, e talvolta giungono insieme allo stesso meridiano. In febbrajo il sole vero precede l'altro di 14' in circa; verso li 15 di aprile giungono insieme al meridiano; ai 15 di maggio il sole immaginario precede di 6', e si uniscono nuovamente verso i 15 di giugno; indi al principio di luglio precede il vero di 6' per essere raggiunto dall'altro sulla fine di agosto, ed allontanarsene poi di 16 minuti verso il principio di novembre, che è la massima diffe-

renza nel tempo di ritorno dei due soli allo stesso meridiano. Indi è che la differenza tra il tempo vero e medio (num. 133) si chiama *equazione del tempo*.

135. Sebbene la differenza tra il giorno medio ed astronomico non sia costante; pure è costante quella che corre tra il giorno medio e sidereo, e questo è più corto di quello di 3′ in 4′. Indi si distinguono dagli astronomi tre tempi relativamente a tre movimenti o giorni differenti. Il ritorno di una stella al meridiano forma il giorno sidereo, e perciò il tempo sidereo, le ore sideree, ec. Il ritorno poi del sole vero al meridiano forma il giorno astronomico e 'l tempo vero; e 'l ritorno al meridiano di un sole immaginario, che si muove con un moto uniforme sull' equatore, ci dà il giorno medio, e il tempo medio, che riferendosi al movimento uniforme del sole è la vera misura del tempo. E come si conoscono le differenze di questi tre movimenti, di questi tre giorni, di questi tre tempi; così facilmente l' un tempo si può convertire in un altro, e gli astronomi a quest' uopo hanno stabilito delle formole, per mezzo delle quali si può facilmente ridurre l' un tempo ad un altro (V. Biot, *Astron. Fis.* tomo II, l. 2, cap. 12).

136. Gli astronomi hanno osservato sulla superficie del sole alcune macchie, il cui numero, posizione e grandezza varia prodigiosamente. Di ordinario sono esse comprese in una fascia della sua superficie, che si estende sino a 34°, e qualche volta sino a 44°. Talvolta si veggono tali macchie sparire, e il sole per più anni è stato purissimo. Al contrario è comparso qualche fiata così ingombrato, che una macchia ha avuto una larghezza tre o quattro volte più grande della terra. Herschel, che osservò il sole attentamente co' suoi prodigiosi telescopj, designò la varietà diversa delle macchie con diversi nomi, come di *noccioli*, *penombre*, *solchi* o di *aperture*, *ombre*, *grinze*, *pori*, ec. (V. *Trans. filos. per l'anno* 1795).

Or dalle osservazioni di queste macchie si è ricavato ch'esse girano ed hanno una rivoluzione costante, la quale è da attribuirsi alla massa solare, a cui stan quasi soppraposte e attaccate. Quindi si è conchiuso dalla costante rivoluzione per più anni delle stesse macchie, che il sole, oltre al moto proprio sull' ecclittica, ne ha un altro intorno ad una linea che passa pel suo centro e intorno a cui gira, che dicesi l' *asse del sole*, il quale

è inclinato di 7° 19′ 23″ sull' ecclittica. Il tempo di questa rivoluzione del sole intorno a sè stesso è di 25g 16′ 48″, e comparisce alquanto più di 27g, perchè esso gira nel medesimo senso che muovesi sull' ecclittica intorno alla terra.

137. Tutte le macchie descrivono una curva ovale simile ad una ellisse; ma la forma di queste ovali, le loro curvature ed inclinazioni stanno sottoposte a notabili variazioni in un anno a cagione della posizione diversa in cui si trovano il sole e la terra. Così al finir di novembre e cominciar di dicembre le ovali fan sembianza di linee rette, e poi queste linee a poco a poco si curvano e forman delle ovali, come avviene nell'inverno e verso la primavera. Indi comincia la curvatura a diminuire, ed al fine di maggio e principio di giugno si tornano a vedere sotto la forma di linee rette, per poi aprirsi di nuovo a pigliar la forma ovale verso la fine di settembre, ec. (V. Biot, *Astron. Fis.*, tomo II, l. 2, cap. 13).

Per ispiegare l'origine di queste macchie sonosi recate in mezzo più ipotesi. Alcuni hanno supposto che provengono dal fumo o dalla materia opaca lanciata dai vulcani, e che come l'eruzione va a finire il fumo si dissipa, e le fiamme appariscono sotto la forma di macchie luminose, che i Francesi chiamano *facule*. Altri hanno immaginato che il sole sia in uno stato continuo di fusione, e che le macchie sono l'eminenze delle gran masse di materia opaca, che per le agitazioni irregolari del fluido luminoso nuotano qualche volta sulla superficie, e poi dispariscono profondandosi. Altri di più han tenuto le macchie per piccoli pianeti che girano intorno al sole ad una piccola distanza dalla superficie. Il sole stesso a parer di La Place è una massa infiammata in cui succedono delle immense eruzioni, e le macchie non sono che vaste cavità da cui per intervalli sgorgano dei torrenti di lava. Herschel al contrario è di opinione che il sole sia un corpo solido ed una massa fredda circondata da un'atmosfera trasparente, in cui nuotano alcune nubi luminose più o meno brillanti, che dividendosi ci danno qualche volta a vedere il nocciolo oscuro e perciò le macchie. Ma checchè sia di queste opinioni, egli è certo che il sole si mostra a noi fornito di tre movimenti, il diurno, l'annuo intorno all' ecclittica, e la rotazione intorno a sè stesso.

CAPO II.

DEL MOTO DEI PIANETI E DELLE LORO APPARENZE.

138. Riguardando il cielo osservansi ad occhio nudo o col favore dei telescopj alcuni astri, i cui moti stan sottoposti a periodi regolari che diconsi *pianeti.* Essi sono Mercurio ☿, Venere ♀, Marte ♂; i quattro, Vesta ⚶, Giunone ⚵, Cerere ⚳, e Pallade ⚴ (che da alcuni si chiamano *asteroidi* per la picciolezza del loro volume, o *pianeti telescopici*); Giove ♃, Saturno ♄, e Urano ♅. I due primi diconsi *pianeti inferiori*, perchè pare che coi loro moti non abbraccino la terra, e gli altri tutti *superiori*, perchè pare che comprendano la terra coi loro movimenti. Tutti questi pianeti, così i superiori come gl' inferiori, muovonsi lungo l' ordine dei segni al par del sole nello zodiaco (num. 126), e si rapportano da noi, per la distanza in cui sono alla regione delle stelle ed ai confini dello spazio. Si distingue solamente nel loro cammino un moto *diretto* e *retrogrado.* Si muovono *direttamente* quando essi camminano secondo l' ordine dei segni, e *retrogrado* si appella il loro movimento quando compariscono di muoversi in senso contrario all' ordine dei segni. Alcuna volta in fine ci pare che i pianeti corrispondano allo stesso punto del cielo, ed allora considerandosi come se fossero in quiete, sembra agli occhi nostri che siano *stazionarj.*

139. Cominciando adunque dai due pianeti inferiori Mercurio e Venere, è da sapere che si mostrano a noi tra la terra e il sole, o pure camminando son così situati che il sole sia tra essi e la terra. In queste posizioni si dicono essi in *congiunzione;* perciocchè osservati dalla terra l'occhio gl' incontra nella medesima linea in cui è il sole, e il sole e Mercurio, e il sole e Venere compariscono allora di corrispondere nel medesimo luogo della sfera celeste. Quando uno di questi pianeti è fra la terra e il sole, la sua congiunzione si chiama *inferiore*, e al contrario ove il sole si trova tra uno di questi pianeti e la terra, la congiunzione dicesi *superiore.* Rappresentando S il sole (*fig.* 31), E la terra, $FABV$, ec., l' orbita di Venere, chiaro si vede che trovandosi que-

sto pianeta in M è nella congiunzione inferiore, e in N nella superiore. Mercurio e Venere adunque si trovano due volte in congiunzione, e non mai possono essere in *opposizione* del sole, perchè non abbracciando col loro cammino la terra, questa non si potrà mai ritrovare in mezzo al sole e uno dei pianeti inferiori, in modo che il sole e Mercurio o il sole e Venere veduti dalla terra compariscano di essere in due punti opposti dei cieli, come avverrebbe se fossero in opposizione.

140. Per comprendere i moti apparenti di Mercurio e Venere, si consideri lo spettatore in E sulla terra (*fig.* 31) nel tempo che Venere descrive la sua orbita. Trovandosi questo pianeta in B, si vede dalla terra sull' ecclittica in b; e descrivendo poi l'arco BU, pare allo spettatore che percorso avesse l'arco bD dell' ecclittica. E come continua a muoversi per l'arco UI, sembra a noi che ritorni indietro percorrendo l'arco Db, finchè giunto in V si darà a vedere a noi come se fosse passato sulla ecclittica per bC. Finalmente avanzandosi Venere nella sua orbita nei punti G, F, A, B, ci parrà di ritornare indietro per C, L, a, b.

141. Si vede da ciò che Venere si discosta dal sole S sino a D da un lato, e sino a C dall' altro. E perchè la distanza apparente di un pianeta dal sole si chiama *elongazione*; così è chiaro che in C e in D succede la massima elongazione di Venere, o sia quando le linee EC, ED tirate dall' occhio dello spettatore sono tangenti all'orbita di Venere, o in generale di un pianeta qualunque. Le parti dell' orbita di Venere corrispondenti alle due più grandi elongazioni in C e D sono ineguali. Imperocchè quando Venere percorre l'arco inferiore UV della sua orbita, è minore dell' arco superiore $VABU$ percorso fra le medesime elongazioni. E però Venere impiegherà meno tempo a passare da D in C, e un tempo maggiore a ripassare da C in D; e dalla durata del tempo interposto alle due più grandi elongazioni argomentiamo benissimo quando Venere si muove nella parte inferiore o superiore della sua orbita. Ora movendosi questo pianeta nella sua orbita superiore da G in F, in A, ec., pare di muoversi per H, L, a, ec., ed allora il suo moto è diretto, perchè si fa secondo l'ordine de' segni. Arrivando in U comparisce come se fosse stazionario in D; perchè sebbene la tangente EU,

lungo cui si vede il pianeta, non tocca che un punto della sua orbita; pure agli occhi nostri un archetto dell'orbita di Venere si confonde colla tangente. E però mentre Venere scorre un archetto da *U* verso *I*, è per noi come se si movesse lungo la tangente *UE*. Si rapporta quindi al medesimo punto dei cieli in *D*, e ci pare che non si muova, e si tiene per istazionaria. Da *U* si porta in *V*, e il suo movimento ci appare retrogrado da *D* in *C* in senso contrario all'ordine dei segni, finchè arrivato in *V* il pianeta torna ad avere la massima elongazione, e comparisce di nuovo stazionario in *C*, come quello ch'è veduto lungo la tangente *EV*.

142. Nello stesso modo che avvengono sì fatte apparenze per Venere, han luogo per Mercurio, e noi possiamo conchiudere che i pianeti inferiori hanno due congiunzioni, due volte compariscono stazionarj, una volta diretti ed una volta retrogradi. E però i pianeti non si veggono mai lontani dal sole, ma sempre l'accompagnano col suo moto apparente lungo l'ecclittica, e muovonsi da *C* in *D*, e da *D* in *C*.

143. Quando Mercurio è vicino a *S* o al sole, non si vede da noi, e allora comincia a ravvisarsi, quando allontanandosi dal sole comincia verso la sera ad emergere dai raggi deboli che gitta il sole dopo il suo tramonto. Nei giorni seguenti portandosi più lungi dal sole, siamo in istato di osservarlo, e dopo esser giunto alla distanza angolare di 22° 30′ dal sole ritorna verso il sole, il suo moto di diretto diventa retrogrado, e alla distanza di 18° dal sole comparisce stazionario. Continua indi Mercurio ad avvicinarsi al sole, e diventando invisibile si rivede poi verso la mattina come più si va discostando dal sole, ed emerge dai suoi raggi. Giunto col suo moto retrogrado a 18° di elongazione, ci appare di nuovo stazionario, e convertendo in seguito il suo moto di retrogrado in diretto si avvicina di nuovo al sole, finchè verso la mattina s'immerge di nuovo nei raggi solari. Resta invisible per qualche tempo, e dopo non molto torna a comparire la sera, e a produrre le stesse apparenze.

144. Le apparenze di Venere sono simili a quelle di Mercurio, perchè questi due pianeti non si allontanano dal sole. Quando Venere da *S* si porta in *D*, e da questo punto ritorna verso *S*, o sia è al lato occidentale,

la mattina spuntando prima del sole si considera come annunziatrice del nuovo giorno, e si dice la *stella della mattina*, o *Lucifero*. Quando da *S* va in *C*, e da *C* ritorna in *S*, o sia è all' oriente, essa tramonta dopo il sole, e però chiamasi la *stella della sera*, o *Espero*. Questo pianeta è così lucido, che vince tutti gli altri in isplendore, e talvolta si vede ancora in pieno giorno ad occhio nudo.

145. Venere osservata col telescopio ci mostra le apparenze che noi veder sogliamo nella luna. Siccome da noi non si vede che una parte ora più ora meno del pianeta, la quale è illuminata; così essa ci presenta varie figure, o, come diconsi, *fasi*. Nella sua massima elongazione in *D* apparisce simile alla luna nel primo quarto, perchè a noi allora è visibile un quarto solo illuminato della superficie di Venere. Indi ritornando verso il sole la sua parte illuminata decresce, e ci comparisce *falcata* o *cornuta*, finchè perdendosi nei raggi solari diventa invisibile, presentando a noi il suo emisfero oscuro. A poco a poco come si va discostando dal sole va crescendo in riguardo a noi la sua parte illuminata, e torna ad essere *cornuta*, finchè giunta in *G* apparisce di nuovo come la luna nel *primo quarto*. Di là ritorna verso il sole, e come passa dalla parte settentrionale del sole, ci presenta stando in *G*, *F*, *A*, ec., una maggior parte della sua superficie illuminata dal sole, e comincia a comparirci più rotonda, finchè rivolgendosi il suo emisfero illuminato s' immerge di nuovo nei raggi solari. Comincia quindi a decrescere in *B*, ec., apparendoci meno rotonda, e arrivata in *D*, o sia nella sua massima elongazione, si mostra sotto la figura della luna quando è un *quarto*.

146. Il pianeta Mercurio ha parimente le stesse fasi; ma trovandosi in tutti i tempi molto prossimo al sole, si può soltanto distinguere col telescopio una variazione nella sua figura, la quale talvolta è quella di una mezza luna, e talora un poco più o meno di mezza.

147. Col favore del telescopio si osserva che Mercurio, quando è nella sua congiunzione inferiore, dopo di esser disparito ritorna a comparire, e si vede talvolta come projettato sulla superficie, o sia disco del sole; perciocchè si vede nella forma di una macchia nera che si muove e percorre una corda del disco solare. Si di-

stingue però che una sì fatta macchia altro non sia che l'ombra gittata da Mercurio, dal moto e dalla grandezza. Questo fenomeno, che succede di rado, la prima volta fu osservato da Gassendi a 7 novembre del 1631, e Delambre ha calcolato una tavola di tutti i passaggi di Mercurio per tre secoli (V. Delambre, *Astron. teor. e prat.* T. II, c. 27, p. 518).

148. Venere parimente apparisce di descrivere colla sua ombra una corda del disco solare nel suo passaggio innanzi al sole. La durata del passaggio di questo pianeta comparisce diversa secondo il luogo diverso in cui trovasi l'osservatore sulla superficie della terra; perciocchè rapportandosi il pianeta per la differenza dei luoghi, dai quali si osserva, a differenti punti del disco solare, ne segue che ad alcuni pare descrivere una corda più lunga, e ad altri una corda più breve della superficie del sole, per cui la durata del passaggio di Venere è più o meno ai diversi osservatori. Or dalla differenza della durata che impiega Venere a passare sul disco solare veduta da diversi e lontani punti della superficie della terra, si è ricavata dagli astronomi la determinazione la più importante, qual è la distanza quanto più si può esatta del sole dalla terra, che ci determina l'estensione del nostro sistema planetario. Indi si riguarda come un'epoca memorabile nell'astronomia quella dei 6 giugno 1761 alla mattina, e dei 3 giugno 1769 alla sera, in cui portatisi più astronomi verso il nord e il sud della terra, poterono osservare il passaggio di Venere sul disco solare, e ritrarre meglio che prima non si sapea la distanza del sole dalla terra. Questo fenomeno ha luogo in otto anni due volte, e poi bisogna aspettare più di un secolo per osservarlo di nuovo, e questi *transiti* sono calcolati sino all'anno 2984. Ci hanno poi dei globi che imitano e danno a vedere i passaggi di Venere e di Mercurio sul sole.

149. Siccome i due pianeti inferiori Venere e Mercurio compariscono di oscillare intorno al sole in S (*fig.* 31), portandosi da D in C e da C in D; così si è ricercato quanto tempo essi impiegano a ritornare in riguardo al sole alla stessa posizione in cui furono una volta veduti dalla terra; e il tempo tra due ritorni conseguitanti alla medesima posizione rispetto al sole, come sarebbe quello tra due cogiunzioni, è stato chiamato *rivoluzione sino-*

dica. Il tempo di questa rivoluzione non è costante nè per Mercurio nè per Venere; per Mercurio varia da 106 sino a 130 giorni, e per Venere, pigliando il termine medio di tutte le sue variazioni, si computa di 584 giorni. La ragione di sì fatta variazione è riposta in ciò, che gli spazj e i tempi delle loro digressioni o elongazioni (num. 141) da S in C e S in D sono variabili, come pure stan sottoposti a variazione gli spazj e i tempi delle loro retrogradazioni. Le digressioni di Mercurio dall'una all'altra parte del sole variano da 16° 12′ sino a 28° 14′, e quelle di Venere da 45° sino a 47° 42′; l'arco medio di retrogradazione di Mercurio è di 13° 30′, e la durata media del tempo corrispondente si valuta per 23 giorni, come l'arco medio di retrogradazione di Venere è di 16° 12′, e la durata media di 42 giorni.

150. La loro grandezza apparente sta al pari sottoposta a cangiamenti, secondo che varia la loro posizione in riguardo al sole, e la direzione in cui muovonsi. Il diametro di Mercurio giunge al *minimum* quando nel suo cammino verso la mattina si immerge nei raggi solari e poi disparisce, o pure quando verso la sera emerge dai medesimi e comincia a comparire. Al contrario giunge al *maximum* nel punto che verso la sera camminando entra nei raggi solari e disparisce, e nel momento che verso la mattina riapparisce uscendo dai raggi solari. Il suo diametro medio apparente è 6″,9. Venere poi ci offre dei cangiamenti notabili nel suo diametro, il quale nel tempo del suo passaggio pel disco solare giunge sino a 57″,3, ma il suo diametro medio è di 16″,547.

151. Dai moti apparenti di Mercurio e di Venere si può ricavare la loro distanza dal sole, ove si conosca già quella della terra dal sole. Imperocchè trovandosi il pianeta nella sua massima elongazione come in V (*fig.* 31), guidata la normale SV alla tangente VE, dal triangolo VES facilmente si ricava la distanza VS del pianeta dal sole. Ma questo metodo in verità non è esatto, perchè l'angolo VES della massima elongazione è variabile, e perchè suppone il sole nel centro dell'orbita del pianeta, sì che EV fosse una tangente e l'angolo EVS costantemente retto, il che non ha luogo che di rado. Ciò non pertanto gli astronomi scegliendo la media elongazione, e 'l punto in cui l'angolo EVS

è retto, hanno ritratto la distanza dei due pianeti dal sole in proporzione a quella del sole dalla terra, che considerano come unità.

152. Sebbene sia molto difficile per le circostanze particolari di osservare le loro macchie, e seguirne il movimento; pure Domenico Cassini ai 14 ottobre 1666 giunse a distinguere una parte del disco di Venere più chiara che il resto, di osservarne il moto, e dedurne dal suo movimento la rotazione intorno al proprio asse. L'osservazione di Cassini fu poi confermata da Bianchini nell'anno 1726; e discordarono solo nella durata della rivoluzione, giacchè il primo l'avea stabilito di 23^{ore} 20′, e'l secondo la ridusse a 24^{ore} 8′. Questa differenza nascea da ciò, che la macchia il domani vedeasi un poco più in là del luogo in cui erasi osservata; dal che Cassini argomentò che si era mossa dopo avere trascorso un'intera rivoluzione, e Bianchini si diede a credere che la macchia non si era tutta revoluta, ma solo avea descritto quel piccolo spazio di cui si era allontanata in un giorno. Restarono in dubbio gli astronomi tra le determinazioni di questi due osservatori, finchè fosse venuto Schroeter, che co' suoi belli telescopj e colle sue diligenti osservazioni ha rassodato quelle del Cassini. Ha Schroeter riguardato in luogo delle macchie le variazioni delle corna di Venere quando è crescente, e alcuni punti lucidi verso l'orlo della superficie non rischiarata di questo pianeta, e ha ricavato il tempo della rotazione di 23^{or} 21′ 7″,2, ed ha trovato al par del Cassini che l'equatore di Venere fa un angolo notabile coll' ecclittica. Anche Mercurio gira sul suo asse in 24^{or} 5′ 30″, e grandissimo è l' angolo della sua orbita col suo equatore. Finalmente l' atmosfera di Mercurio è densissima, e quella di Venere, secondo le osservazioni di Schroeter, è fornita di un potere rifrangente che poco differisce da quello della terrestre. L' uno poi e l' altro pianeta danno a vedere delle ineguaglianze sulla loro superficie, ed hanno delle montagne che meglio si osservano in Mercurio.

153. Dalle apparenze dei pianeti inferiori a quelle volgendoci dei superiori, consideriamo uno spettatore in Venere, che guarda la terra. Quando è in B osserva la terra elongata dal sole sotto l'angolo EBS, il quale andrà crescendo come Venere si porterà in U, dove

l'angolo *EUS* è retto, e continuerà a crescere quando Venere giungerà in *I*, sino che arrivato il pianeta in *M* vedrà la terra in opposizione del sole. Da *M* l'angolo di elongazione va successivamente menomandosi come Venere si porta in *V*, *G*, ec., sino all'arrivo del pianeta in *N*, da cui lo spettatore vede la terra in congiunzione col sole. Nascono da ciò le apparenze della terra stazionaria, retrograda, o di un movimento diretto. Imperocchè la terra veduta da *N* comparirà tra le stelle fisse in *P*, da *B* si vedrà in *R*, da *U* in *O*, dove sembrerà stazionaria, finchè l'archetto dell'orbita di Venere si confonde sensibilmente colla tangente in *U*. Da *I* si vedrà la terra che ritornerà indietro con un moto retrogrado in *R*, da *M* in *P*, da *K* in *T*, da *V* in *Q*, dove di nuovo sarà stazionaria, e da *H* sarà veduta di bel nuovo in *T* movendosi con un moto diretto. Ora se la terra si muove, come appresso sarà dimostrato, darà a vedere gli stessi movimenti agli spettatori in essa collocati nell'atto che osservano i pianeti superiori, che Venere dimostra agli spettatori in essa posti in riguardo alla terra; e i movimenti dei pianeti tutti sono stazionarj, diretti, o retrogradi. Oltre di che, quando un pianeta superiore veduto da un inferiore apparisce stazionario, il pianeta inferiore veduto dal superiore sembra nel medesimo tempo parimente stazionario. In fatti uno spettatore in *E* vede Venere stazionaria in *U*, e uno spettatore in Venere collocata in *U* vede la terra stazionaria in *O*. E parimente quando il pianeta inferiore veduto dal superiore ha un moto apparentemente retrogrado, anche il pianeta superiore ha un moto apparentemente retrogrado. Così lo spettatore in *E* vede Venere che si porta da *U* in *I* retrograda da *D* in *b*, e quando è collocato in Venere, che si trova in *I*, vede la terra retrograda da *O* in *R*. Altre differenze non si osservano tra le apparenze dei pianeti inferiori e superiori se non, 1.° che quelli si veggono due volte in congiunzione, e non mai in opposizione, e questi sono ora in congiunzione ed ora in opposizione; 2.° che i pianeti superiori veggonsi *in quadratura* o sia distanti 90° dal sole, il che accade quando la linea lungo cui si vede il sole dalla terra, e quella lungo cui si vede il pianeta dalla terra, formano un angolo retto, per cui appare il pianeta 90° lontano dal sole, e i pianeti in-

feriori non veggonsi mai *in quadratura*, perchè nelle loro massime elongazioni non giungono mai ad esser distanti dal sole per 90°.

154. Sebbene tutti i pianeti superiori compariscano diretti, retrogradi e stazionarj; pure non sempre muovonsi colla stessa rapidità nei loro moti, nè è costante il tempo della loro retrogradazione, o di altra simile apparenza. Marte si muove molto inegualmente; perciocchè come esce dai raggi solari verso la mattina cammina colla più gran velocità e giusta l' ordine dei segni, finchè il suo moto si va pian piano rallentando, e divenga nullo alla distanza di 136° 48′ dal sole. Si muove quindi con un movimento retrogrado, e va crescendo in celerità, la quale giunge al *maximum* nella opposizione. A poco a poco si va rallentando il suo moto, e appare nullo quando ritorna verso il sole, e giunge alla distanza di 136° 48′. Allora il suo moto dopo di essere stato retrogrado, descrivendo un arco di quasi 16° 12′ in 73g, comincia a diventar di nuovo diretto, e va avvicinandosi sempre più al sole, finchè del tutto resti immerso verso la notte ne' suoi raggi. Queste apparenze han luogo ogni volta che Marte si trova in opposizione col sole; ma la durata e l' estensione nelle retrogradazioni non sono costanti ogni qual volta rinnovansi. Giove parimente ci presenta simili ineguaglianze. Imperocchè prima che fosse in opposizione col sole, e quando n' è distante intorno a 115° 12′, il suo moto è retrogrado, e la sua celerità va sempre più crescendo sino all' opposizione. Indi il suo moto ritarda, e di retrogrado si cangia in diretto quando avvicinandosi verso il sole si trova distante 115° 12′. La durata del moto retrogrado, trascurate tutte le variazioni, si computa di 121g, e l'arco medio di retrogradazione di 9° 54′. E senza rapportare più distesamente e ad una ad una tutte le ineguaglianze dei pianeti superiori, si potranno leggere nell'*Astronomia* di La Lande (V. Delambre, *Astr. teor. e prat.* T. II, cap. 27).

155. Marte perfeziona la sua rivoluzione sinodica nello spazio di 2an 49g 22or 28′ 26″, Giove di 1an 33g 21or 15′ 45″, Saturno in 1an 13g 2or 8′ 8″, Urano 1an 4g 16or 31′ 46″, e per gli ultimi quattro pianeti Vesta, Pallade, Cerere e Giunone non abbiamo ancora delle certe determinazioni.

156. I diametri delle loro apparenti grandezze sono ora maggiori ed ora minori a tenore della loro distanza dalla terra. Marte, il cui medio diametro apparente è presso 13",3, comparisce di un diametro che va sempre più crescendo come si avvicina all'opposizione, e giunge in questo punto a 29",1. Incerti siamo su i diametri degli asteroidi, poichè eccetto del diametro di Cerere, che veduto dalla terra è di 1", tutti gli altri non sono stati determinati che per estimazione. Giove, che è un pianeta molto lucido e che arriva talvolta a vincere lo splendore di Venere, ha nella sua media grandezza il diametro del suo equatore di 38",2, il quale nelle opposizioni giunge a 48",2. E siccome Giove è schiacciato verso i poli; così il suo diametro nel senso dei poli è a quello nel senso dell'equatore, o sia il suo asse minore è al maggiore come 13 a 14. Saturno ha parimente i suoi diametri ineguali, la cui differenza è quasi un undecimo, e 'l suo diametro maggiore nella grandezza media e di 16",6. Finalmente quello di Urano è piccolissimo, e appena giunge a 4".

157. Domenico Cassini si accorse il primo, dal movimento delle macchie di Marte e di Giove, che questi due pianeti hanno un moto di rotazione intorno al proprio asse. Marte gira d'occidente ad oriente in 24^{or} 31' 22" intorno ad un'asse quasi perpendicolare alla sua orbita, ma molto inclinato in riguardo all'ecclittica. Il disco di questo pianeta cangia di forma e sensibilmente comparisce ovale secondo la sua varia posizione in riguardo al sole. Giove rota di occidente in oriente nel tempo di 9^{or} 56' intorno al suo asse, che è quasi perpendicolare al piano dell'ecclittica. Secondo le osservazioni di Herschell, Saturno gira parimente d'occidente in oriente intorno al proprio asse in 10^{or} 16' 29",5. Finalmente, giusta l'insegnamento dell'analogia, essendosi scoperto un moto di rotazione nel sole (num. 136), in Venere (num. 152), in Marte, Giove e Saturno, ci è permesso di conchiudere che tutti i pianeti sieu forniti del moto di rotazione intorno al proprio asse, il quale si fa d'occidente in oriente.

158. Volendo notare i fenomeni principali che osservansi nei pianeti, son da ricordarsi le *fasce* di Giove e l'*anello* di Saturno. Oltre alle macchie che si trovano sparse sul disco di Giove, nelle quali una disparve nel

1694 e non si rivide più sino al 1708, si veggono alcune fasce oscure, paralelle tra loro e coll' ecclittica, che abbracciano il disco di Giove come una cintura. Queste, che furono per la prima volta osservate nel 1630, non sono regolari o costanti nella loro apparenza. Esse sono state vedute alle volte nel numero di cinque, e durante il tempo dell' osservazione a poco a poco ne sono sparite due; talora se ne vede una sola, e alcuna volta quando sono molte di numero si formano tra le medesime una o più macchie oscure, le quali vanno crescendo, finchè si uniscano poi in una fascia oscura più larga. Simili fasce sono state ancora osservate da Herschell al numero di cinque sulla superficie di Saturno, le quali sono paralelle presso a poco all' equatore di questo pianeta. Credono alcuni che le fasce di Giove e di Saturno non sieno che mari, e le loro variazioni che delle maree. Pensano altri che le macchie e le fasce non sieno inerenti al corpo dei pianeti, ma fenomeni che han luogo nell' atmosfera sempre agitata di Giove e di Saturno, per cui le considerano come tante nubi trasportate dalla forza dei venti. Tutto in somma è ipotesi senza più.

159. Saturno si osserva quasi sempre come apparve la prima volta nel 1610 a Galileo ajutato dal telescopio, cioè a dire in mezzo a due piccoli corpi, detti *anse*, che variano di figura e posizione, e giungono alcuna volta anche a disparire in modo che Saturno si mostra rotondo come tutti gli altri pianeti. Hugenio fu il primo a vedere un anello che circonda Saturno, ed a spiegarne tutte le apparenze che si possono vedere rappresentate nella *fig.* 38. Saturno adunque camminando nella sua orbita strascina seco un anello circolare, opaco, sottilissimo, che non gli è in alcun luogo aderente, il quale si vede dalla terra in diverse posizioni e sotto diverse inclinazioni. Egli è naturale ch' essendo l'anello inclinato di 29° a 30° si presenti a noi sulla terra obbliquamente, e si vegga da noi nella forma di un' ellisse nello stesso modo che si vede un cerchio in una obbliqua situazione. E come varia la posizione di Saturno in riguardo alla terra, e l'inclinazione del raggio visuale guidato da Saturno alla terra; così variano le apparenze dell'ellisse come sono in *b*, *c*, *g*, *t*, e l'ellisse si vede più o meno stretta, più o meno inclinata al piano dell'anello. Quando

la superficie illuminata dell'anello è abbassata verso la terra nel modo che si presenta in *A*, *A'*, si vede ch'essa projetta sul globo di Saturno un'ombra sensibile alle osservazioni. La forma in fine dell'ellisse ha nel suo *maximum* una larghezza metà della sua lunghezza, o sia come 1 a 2; ed in questa posizione il diametro del suo più piccolo asse eccede quello del pianeta. In generale l'anello ci appare luminoso quando rivolge verso noi quella delle due facce ch'è rischiarata dal sole, e non si vede quando ci presenta la faccia opposta, come avviene quando si trova tra il sole e la terra. Sparisce di più quando il suo piano prolungato passa pel centro della terra; perciocchè vediamo allora l'anello per la sua grossezza, la quale, come quella che riceve poca luce, non ne riflette abbastanza per eccitare l'impressione nei nostri sensi, e l'anello perciò diventa invisibile e quasi aderente a Saturno, come si vede in *d*. Disparisce finalmente quando il piano dell'anello prolungato passa pel sole; perciocchè parimente allora i raggi solari imbattendosi nella grossezza dell'anello non vengono a noi riflessi in copia sufficiente per vederlo. Poichè sebbene la grossezza sia di 1500 miglia, pure per la distanza sottende appena l'angolo di 1″. Di fatto gli osservatori veggono disparire l'anello chi prima, chi dopo, ed alcuni continuano eziandio a vederlo non altrimenti che una linea lucida, coll'ajuto di un eccellente telescopio, mentre più non si vede con i telescopj ordinarj. Herschell non lo perdette mai di vista nel 1790, mentre era invisibile per tutti gli altri.

160. Sebbene alcuni osservatori si diano a credere che l'anello di Saturno sia diviso in più parti, ed esso tutto risulti da più anelli concentrici; pure Herschell ci attesta, dopo le più accurate osservazioni da esso dirizzate con un telescopio di sette piedi, che la superficie dell'anello non è continua, ma che una sola fascia nera, che gli è concentrica, la divide in due parti che sembrano formare due anelli distinti. Il diametro interiore dell'anello più piccolo si reputa da Herschell di 48782 leghe, e l'esteriore di 61464; e l'interiore dell'anello più grande di 63416, e l'esteriore di 68294; di modo che la distanza tra l'anello interiore e la superficie di Saturno risulta 14444 leghe. La larghezza poi dell'anello interiore è stata valutata dall'Herschell di 6541

leghe, e quella dell'esteriore di 2439, in modo che lasciano tra loro uno spazio vôto di 682 leghe (Vedi le *Transaz. Filosof. negli anni* 1790 *e* 1792).

161. Non ci è dubbio che questo anello non sia egualmente solido che il corpo di Saturno, perchè gitta un'ombra molto densa sopra questo pianeta. La luce dell'anello è più splendente di quella di Saturno per l'ordinario, giacchè l'anello luccica abbastanza nello stesso tempo che il telescopio ci mostra languida la luce di Saturno. Molte e replicate osservazioni han fatto argomentare ad Herschell che l'anello sia molto rado. Ma egli non dubita che fornito sia di un movimento di rotazione intorno ad un asse che passa pel centro di Saturno, ed è perpendicolare al suo piano, nel tempo di 10^{or} 30'. E sebbene un tal moto di rotazione sia stato posto in dubbio da Schroeter e Harding; pure fu prima scoperto dall'Herschell dal moto di alcuni punti che più luccicavano sulla superficie dell'anello, e poi confermato dai calcoli di La Place.

CAPO III.

DELLA LUNA E DEGLI ALTRI PIANETI SECONDARJ.

162. Come la nostra luna si muove seguendo la terra, e girandole intorno, si sono col favore del telescopio scoperte altre lune che muovonsi e girano intorno a qualche pianeta, le quali portano il nome di *pianeti secondarj* o di *satelliti*. Lasciando stare l'opinione di quei che suppongono l'anello di Saturno come composto di un gran numero di lune, e il sentimento di altri che credono Urano fornito di un anello come Saturno, egli è certo che un satellite ha la nostra terra, quattro Giove, sette Saturno, e sei accompagnano Urano. Le lune di Giove, di Saturno e di Urano distinguonsi dagli astronomi col nome di primo, di secondo, di terzo, ec., satellite, e 'l loro ordine si determina dalla maggiore o minore estensione delle loro oscillazioni intorno al pianeta principale. Siccome i satelliti oscillano d'oriente in occidente intorno al loro pianeta principale nel modo che si è dichiarato per Mercurio e per Venere; così pigliano il nome di primo, secondo, ec., satellite a misura

che più cresce la loro massima elongazione. Ma tra i moti apparenti dei satelliti quello che più ci importa di conoscere è il moto della luna.

163. La luna essendo piena comparisce col diametro, che cangia di 29',365 a 33',516; per lo che si dà a vedere ora più ed ora meno grande del sole. Basta questa osservazione per indicarci che ora è più lontana (num. 123) ed ora più vicina alla terra, e che il suo movimento non è circolare, molto più che la sua velocità non è uniforme, ed ora accelera il suo movimento ed ora lo ritarda. E come, riguardando il centro della terra come il centro del moto della luna, si è osservato che il suo raggio vettore aree presso a poco descrive proporzionali ai tempi; così la sua orbita si tiene per un' ellisse, e che la terra sia in uno dei due suoi fuochi. Indi si distingue il perigeo e l' apogeo della luna, e pigliando per unità la sua distanza media dalla terra, si valuta la sua eccentricità per 0,0549. Ciò non ostante è da confessarsi che l'ellisse dell' orbita lunare non può rappresentare con esattezza tutti i luoghi in cui si trova la luna, a cagione di tante cause che ne van perturbando il movimento ellittico. Le ineguaglianze quindi del moto lunare nascono dalla differenza che corre fra il suo moto reale e quello che avrebbe avuto luogo se avesse descritto aree eguali in tempi eguali movendosi in un'ellisse.

164. L'orbita della luna essendo inclinata di 5° 8' 49'' all' ecclittica, la taglia in due punti, che diconsi *nodi*, dei quali l' uno si chiama *ascendente* e l' altro *discendente*, perchè nel primo la luna s' innalza sopra l' ecclittica verso il polo boreale, e nel secondo si avanza verso il polo australe, e la retta, che unisce i due opposti nodi, chiamasi la *linea dei nodi*. Ora l'inclinazione dell' orbita lunare non è costante, ma oscilla alquanto intorno ad uno stato medio. I nodi dell' orbita lunare sono parimente soggetti a continuo cangiamento; perciocchè essi non corrispondono sempre agli stessi punti del cielo, ma camminano con un moto retrogrado, cioè a dire in senso contrario al moto del sole. Nasce da ciò che la linea dei nodi non è stazionaria, ma movendosi compie la sua rivoluzione siderea, o sia ritorna alla stessa stella da cui si partì, nel tempo di circa 19 anni, computandosi il medio moto dei nodi in un anno di 19° 19' 45'', e in un giorno di 3' 10'' 38'''. Nè questa ri-

voluzione della linea dei nodi è costante, perchè il moto dei nodi ritarda di secolo in secolo di qualche grado. Oltre alla linea dei nodi, troviamo che quella degli apsidi pure si muove, ma con un moto diretto, cioè a dire di occidente in oriente; e questo proviene da ciò, che il perigeo e l'apogeo non sono fissi nel medesimo punto dell' orbita lunare, ma si rivolgono (num. 163) movendosi d' occidente in oriente, e perfezionando una rivoluzione siderea o intera nello spazio di circa nove anni. E questa durata non è costante, perchè il moto del perigeo, da cui dipende quello della linea degli apsidi, si va rallentando di secolo in secolo, nè si muove con un moto uniforme, ma variabile. Finalmente da ciò è chiaro che l' eccentricità dell' orbita lunare non è costante, e che questa variando debba ancor variare l'equazione al centro (num. 133).

165. Uno dei principali fenomeni che si osservano nella luna, è il cangiamento continuo della sua figura, o le fasi. Nella *fig.* 34 la terra è nel mezzo dell' orbita lunare *ABCDE*, e trovandosi la luna in *A* è in congiunzione col sole (num. 139), e da noi non si vede, perciocchè tutto il suo disco illuminato è rivolto al sole da cui riceve la luce, e verso di noi volge il suo emisfero non illuminato; ond'è che la luna in questo stato si dice da noi *luna nuova.* A poco a poco la luna si va elongando dal sole, e noi dalla terra cominciamo a vedere un filo circolare della luna illuminato, perchè il resto del suo disco illuminato per la nostra posizione ci è nascosto. In *B* diventa luna crescente, e in *C* siamo in istato di osservare metà del disco lunare illuminato; allora si dice *primo quarto.* Da *C* avanzandosi la luna in *D*, si discopre una parte illuminata del disco lunare più grande della metà, finchè giunta in *E*, o sia nell'opposizione (num. 139), si presenta ai nostri sguardi tutto l' emisfero illuminato, e in tale stato la luna si dice *piena.* Dall' opposizione sino a *G* va decrescendo per noi il disco lucido della luna colla stessa legge con cui andò crescendo da *C* in *E*, e da *G* come si porta la luna in *H*, e quindi in *A*, va parimente mancando come andava apparendo da *A* in *B*, per produrre di nuovo le stesse fasi o apparenze, che meglio si possono osservare nella *fig.* 45. È solamente qui da notare che qualche volta vicino al novilunio si può osservare quella

parte del disco lunare che non è rischiarata dal sole, per mezzo di una luce debole, che i Francesi chiamano *cendrée* o cinerizia. Ma questa è prodotta dalla riflessione della luce che manda sulla luna l'emisfero illuminato della terra, che nel tempo della congiunzione dirizza una gran parte del suo emisfero illuminato verso la luna.

166. I punti dell'orbita A, E, in cui la luna è in congiunzione e in opposizione col sole, si chiamano le *sizigie* (*fig.* 34). I punti dell'orbita C e G, in cui la luna è distante 90° o 270° nel senso del moto nella sua orbita, diconsi le *quadrature*. Il punto B intermedio tra A e C, e il punto D tra C e E, o pure F e H, l'uno equidistante da E e da G, e l'altro da G e da A, si appellano gli *ottanti*, che si distinguono col nome di primo, secondo, terzo e quarto ottante.

167. Il moto della luna nella sua orbita si può considerare riguardo al sole. Siccome il sole, nel tempo che la luna percorre la sua orbita, si avanza nell'ecclittica; così ne viene che la luna per raggiungere il sole dee descrivere non solo tutta la sua orbita, ma quella parte di più di cui il sole si è avanzato. Il tempo quindi che impiega la luna a ritornare allo stesso punto della sua orbita da cui si partì, dev'essere e di fatti è minore di quello che impiega per raggiungere il sole, o sia a ritornare da una congiunzione ad un'altra. La prima rivoluzione si chiama *periodica*, e la seconda *sinodica*; quella si valuta di 27g 7or 43′ 4″,65, e questa di 29g 12or 44′ 2″,8. E perchè la luna va a raggiungere il sole in virtù della sua velocità, ch'è maggiore di quella del sole; così la differenza dei due movimenti o l'eccesso della celerità della luna sopra quella del sole si chiama *moto sinodico* lunare. Ora le fasi della luna, le congiunzioni e le opposizioni si rapportano alla rivoluzione sinodica e non periodica della luna; perciocchè le fasi dipendono dalla posizione della luna riguardo al sole, e non dal moto della luna, a perfezionare la sua orbita; e però dicesi rivoluzione sinodica lo spazio interposto a due novilunj o plenilunj, cioè a dire a due congiunzioni o pure a due opposizioni. Ma la durata della rivoluzione sinodica da noi segnata è la media; perchè in sè è variabile, e talvolta si estende a 29g 19or in circa, o pure si ristringe a meno di 29g 8or. Per lo che andrebbe errato colui che, dato il momento del novilunio o del

plenilunio, volesse ritrovare il novilunio o plenilunio seguente coll' aggiungere 29g 12 or 44′ 2″,8; perciocchè non si avrebbe l'istante esatto della congiunzione o dell'opposizione, ma un punto vicino. La stessa rivoluzione *periodica* si computa dal ritorno della luna ad un punto della sua orbita in rapporto agli equinozj, o pure dal ritorno della luna alla medesima stella, e dicesi *siderea;* e come gli equinozj retrocedono (num. 132), così avviene che la rivoluzione tropica (num. 129) è più breve della siderea di quasi 7″. Anzi riguardando al rivolgersi della luna nella sua orbita, egli è certo che durante il primo quarto la velocità della luna si diminuisce; dalla quadratura all'opposizione si accresce, dall' opposizione all' ultima quadratura di nuovo si diminuisce, e da questa quadratura alla congiunzione nuovamente si aumenta; o, più esattamente, la celerità ordinaria della luna non sta soggetta a cangiamento nelle quadrature e nelle sizigie, ma nel primo e terzo ottante giunge ritardando al *minimum*, e nel secondo e nel quarto al *maximum* di accrescimento; e questa ineguaglianza del moto lunare nei varj ottanti della sua orbita è stata chiamata *variazione*. Ed in verità siccome la quantità del moto angolare che la luna perde nel primo e terzo ottante eccede quella ch'essa guadagna nel secondo ed ultimo ottante; così ne segue che l'intera rivoluzione periodica si compie in un tempo più lungo di quello che si sarebbe impiegato, se la luna non fosse soggetta a tale variazione, ma descrivesse aree esattamente eguali in tempi eguali. Oltre a ciò una sì fatta variazione, e perciò il ritardo del tempo periodico è maggiore quando il sole è nel perigeo, e minore quando si trova nell'apogeo; di che nasce che tutte le variazioni della luna non sono eguali, ma si fanno in minor tempo quando il sole è nell' apogeo, che quando trovasi nel perigeo. E come il sole accelera il suo moto nel perigeo e lo rallenta nell' apogeo (num. 124); così gli astronomi dicono che il moto della luna si accelera ove quello del sole si ritarda, e al contrario si ritarda ove il moto del sole si accelera; e chiamano una sì fatta ineguaglianza, che dipende dal corso annuo del sole, *equazione annua*. Finalmente non è da tacersi che gli astronomi, avvertiti la prima volta da Halley, hanno scoperto una variazione nella durata della rivoluzione siderea della luna,

per cui il suo moto medio si accelera. Ma, come ha dimostrato La Place, una sì fatta accelerazione va al presente crescendo sino che giunta al *maximum* si converte in ritardamento, per poi ritornare ad accelerare periodicamente. Queste ed altre simili ineguaglianze nei moti della luna han recato molto affanno agli astronomi per formarne le tavole, comechè oggi se ne siano in fine dirizzate di quelle che seco portano una grande esattezza.

168. Dalle fasi della luna chiaro si vede dalla *fig.* 45, che ove la luna in *L* è piena o sia in opposizione al sole *S*, può restare priva di luce, e succedere un' ecclisse lunare. Poichè situata com'è la terra *T* tra il sole e la luna, gitta il cono della sua ombra sulla luna, e riparandole i raggi solari, dai quali dovrebbe essere illuminata, viene ad ecclissarla. Un' ecclisse lunare adunque nasce da ciò, che la luna passa e s' immerge nell' ombra gittata dalla terra. Ma l' ecclisse non può aver luogo in ogni opposizione; perchè essendo l' orbita della luna inclinata all' ecclittica, può succedere che l' ombra della terra cada nello spazio sopra o sotto la luna. È di necessità per aver luogo l' ecclisse lunare, non solo ch' essa sia in opposizione, ma che i centri del sole, della terra e della luna sieno nella medesima linea o quasi, ch' è quanto a dire, che la luna sia nei nodi o vicino ai medesimi. Così nella *fig.* 36 sebbene la luna sia in opposizione in *F*, pure l' ombra projettata da *A* cade nello spazio al di sotto della luna, e non succede ecclisse. Comincia al contrario ad aver luogo l' ecclisse a misura che la luna stando in opposizione si avvicina al nodo, o pure è nel nodo, come si vede in *C, I, N*. Di fatto si è calcolato a 12° in 13° di distanza dal nodo il *limite degli ecclissi;* giacchè al di là di 12° 6′ non può mai succedere ecclisse.

169. Questo può esser *totale* o *parziale* secondo che la luna disparisce in tutto o in parte. Così in *C* è parziale, in *I* è totale, e in *N* si dice centrale, perchè il centro del disco lunare passa a traverso di quello dell' ombra. Indi gli astronomi sogliono dividere il diametro della luna o di altro astro ecclissato in 12 parti eguali, che chiamano *diti*, e ciascun dito in 60′, affine di poter disegnare negli ecclissi parziali le parti del disco che restando ingombrate dispariscono. Quando il lembo orientale della luna tocca l' orlo occidentale del-

l'ombra, si dice il *principio dell'ecclisse*, o l'*immersione* della luna; ed ove il lembo occidentale della luna abbandona quell'orientale dell'ombra, si dice il *fine dell'ecclisse*, o l'*emersione*. Il tempo in cui il disco lunare sta nell'ombra si chiama la *totale immersione*. Ma anche nell'ecclisse totale della luna, questa non si perde al tutto di vista, perchè il suo disco è rischiarato alquanto da una luce rossastra che proviene dai raggi del sole, che rifrangendosi nella nostra atmosfera non giungono alla terra, e continuano il loro cammino nello spazio.

170. Siccome gli ecclissi nascono dalla posizione della luna e del sole riguardo al nodo della luna; così sapendosi quando il sole o la luna ritornano alla medesima posizione in riguardo al nodo, si può conoscere e predire quando avranno luogo gli ecclissi, perciocchè ritornano collo stesso ordine con cui sono accaduti. Ora il sole e la luna ritornano alla medesima posizione relativamente al nodo dell'orbita lunare dopo 223 mesi lunari, che corrispondono a 18 in 19 anni solari; e però questo tempo forma e stabilisce un periodo o restituzione di tutti gli ecclissi. Questo periodo è stato chiamato il *saros caldaico* o il *periodo degli ecclissi*. Ciò non ostante è da confessare che questo periodo in riguardo ai nodi non è esatto, e le ineguaglianze cui stan sottoposti i movimenti del sole e della luna produconvi delle differenze notabili. Ond'è che si stima più rigoroso il gran periodo di 521 anni.

171. Sebbene i pianeti primitivi, per la distanza in cui si trovano tra loro, non si possono a vicenda ecclissare; pure l'ombra projettata da quei che han satelliti può giungere sino a questi ed ecclissarli, come fa la terra alla luna, purchè il sole, il pianeta e 'l satellite sieno nella medesima linea e pressochè nel medesimo piano. Di fatto i satelliti di Giove restano immersi nell'ombra projettata da questo pianeta, quando esso ritrovasi vicino all'opposizione e ai nodi tra il sole e i satelliti. Ma è da distinguersi l'ecclisse dall'occultazione dei satelliti; giacchè quello proviene dalla immersione loro nell'ombra di Giove, e questa da ciò, che il globo di Giove c'impedisce di vederli, alla nostra vista occultandoli. Così da noi si vede talvolta il principio e non il fine dell'ecclisse del primo satellite di Giove, giacchè nel punto della sua emersione dall'ombra ci viene

occultato dal corpo del pianeta, ed all'inverso si può osservare da noi l'emersione e non l'immersione del satellite, perchè in tal punto da noi non si vede. Non così avviene però degli altri satelliti, le cui immersioni ed emersioni dall'ombra di Giove ci sono sempre visibili.

172. Come l'ombra terrestre projettata sulla luna quando è piena forma l'ecclisse lunare, così l'ombra della luna gittata sulla terra ci dà oscurità e cagiona l'ecclisse del sole, come si vede nella *fig.* 45, in cui la luna *l* è interposta alla terra *T* e al sole *S*. Le circostanze per avvenire un sì fatto ecclisse sono due: che la luna sia nuova e nei nodi o vicino ai nodi, perchè così terra, luna e sole sono nella medesima linea o quasi, e 'l cono dell'ombra della luna giunge sino alla terra. Sia *ABM* (*fig.* 35) il disco solare, *I*, *H*, *G* quello della luna che projetta sulla terra la sua ombra, e *N* il nodo. In tale stato l'ecclisse dipende dalla posizione del nodo e dall'angolo d'inclinazione *FND*. Quando i centri *K*, *L* del sole e della luna sono molto distanti tra loro, questa non può impedire che i raggi del sole pervengano sino alla terra; ma quando i due astri si avvicinano ai nodi, i due centri *K*, *L* si mettono quasi nel medesimo piano, il disco della luna occulta più o meno del disco solare, e succede l'ecclisse impropriamente detto del sole, perchè il sole non si oscura, ma è la terra che s'immerge nell'ombra della luna. In questo modo allorchè la novella luna e la congiunzione è meno di 13° dai suoi nodi, deve necessariamente succedere un ecclisse di sole, e i limiti di sì fatti ecclissi giungono ancora a 19°.

173. Siccome la luna è più piccola della terra, così l'ombra di quel satellite non può comprendere e abbracciare tutto l'emisfero della terra. Indi non si può dare ecclisse totale del sole per tutta la terra, e si distingue nell'ecclisse solare l'ombra da quello spazio contiguo che è in parte rischiarato, e dicesi *penombra*. Un ecclisse totale oltre a ciò non può aver luogo sulla terra che per uno spazio di 60 leghe, perchè l'ombra projettata dalla luna non può abbracciarne spazio maggiore. Di modo che gli ecclissi lunari sono eguali per tutta la terra, e i solari son diversi per varj luoghi della terra.

174. Ma per meglio comprendere le circostanze che alterano la quantità degli ecclissi solari, è da sapere

che assai influiscono a variarne le apparenze la distanza diversa in cui si trovano la luna, la terra ed il sole, e in particolare il diametro apparente della luna e del sole. Non vi ha dubbio che per aver luogo un ecclisse debbono quei corpi essere nella medesima linea coll' occhio dell' osservatore; ma se la luna è perigea e 'l sole apogeo, e in generale se il diametro della luna ci comparisce più grande di quello del sole, allora l' ecclisse sarà totale per una data estensione della superficie della terra. Ma se la luna stesse alla media distanza della terra, allora la lunghezza del cono dell' ombra della luna sarebbe eguale forse a 84000 leghe, o sia sarebbe eguale a quella distanza media. Per lo che il vertice dell' ombra verrebbe in un momento a toccare un luogo della terra. Se poi la luna si trova in distanza dalla terra più che la media, il suo diametro ci apparirebbe meno di quello del sole, ed allora il vertice dell' ombra della luna non giunge sino alla terra; ma si osserva intorno al disco della luna un anello luminoso formato dai raggi solari che lambiscono gli orli del disco oscuro della luna, e l' ecclisse si chiama *annulare*. Finalmente se la luna, il sole e la terra non si trovano in una medesima linea, ma la luna si trova in vicinanza dei nodi dentro i limiti (num. 172) degli ecclissi, essa nasconde una parte del disco solare, e l' ecclisse è *parziale*.

175. Si aggiunga a tutto questo, che l'elevazione della luna più o meno sopra l' orizzonte altera il diametro apparente della luna; e che la luna veduta da punti diversi della superficie della terra potrà comparirci più o meno distante dal centro del sole. Come varia adunque la posizione dell' osservatore sulla superficie della terra, e l'elevazione della luna sopra l' orizzonte, viene ad alterarsi il diametro apparente della luna, e la distanza tra il centro della luna e quello del sole; e viene a vedersi così diversa l' apparenza degli ecclissi in riguardo agli abitatori delle diverse contrade della terra. Di modo che di due osservatori lontani, l'uno potrà vedere l'ecclisse solare, e l' altro no, a differenza dei lunari che si veggono egualmente e nella stessa forma da tutti.

176. Perchè l'ombra conica della terra è più grande della luna, questo satellite può restare immerso nell'ombra in un ecclisse totale per 1or 45′; ma un ecclisse totale del sole non può durare più di 5′. Poichè il dia-

metro della luna perigea non può eccedere quello del sole apogeo che di 2′ 55″ di grado, spazio che la luna percorre in 4′ o 5′ di tempo, essendo la velocità della sua ombra di 610 leghe per ora. Di modo che in riguardo alla terra un ecclisse totale del sole si può riguardare come una nube che camminando occulta il sole alle parti successive e rischiarate della terra, da prima le occidentali e poi le orientali. Ma nell'ecclisse solare la luce cinerizia (num. 165) è sensibile, e ci dà a vedere in qualche modo il disco della luna.

177. Varj sono stati i metodi immaginati dagli astronomi per calcolare gli ecclissi solari; ma di ordinario si adopera quello di Keplero, che fu poi ridotto a perfezione dal Cassini, e consiste nel calcolarli nello stesso modo che farebbe un astronomo situato nella luna. *AB* rappresenta (*fig.* 37) la terra veduta dalla luna sotto un angolo di circa 1° 54′, e la terra è riferita all'orbita opposta della luna *CD*, nella quale appare. I circoli *G*, *H*, *I* rappresentano le ombre gittate dalla luna, le quali come opposte al sole, massime quando la luna è vicina ai nodi, compariranno sensibilmente nell'ecclittica. Il sentiero quindi *FE* dell'ombra farà con la linea *CD* un angolo *FND* eguale all'inclinazione dell'orbita lunare, e 'l nodo *N* sarà tanto lontano dal centro della terra, quanto sarebbe lontano dal centro della luna, nel caso che fosse osservato dal sole. Oltre a ciò è da tenersi presente che lo spettatore situato sulla luna vedrebbe muovere la terra sulla linea *CD* con un moto eguale a quello con cui la luna guardata della terra comparisce camminare nella stessa orbita, e 'l movimento dell'ombra nella linea *FE* equivale a quello del sole nell'ecclittica. Ciò posto, è facile di descrivere l'ecclisse per ciascun luogo della terra. Poichè il diametro dell'ombra vera *K*, *L* o *M* veduto dalla luna sarà eguale all'eccesso del diametro apparente della luna sopra quello del sole, quando ambedue sono veduti dalla terra. Il diametro della penombra *G*, *H*, o *I* (num. 173) veduta dalla luna sarà eguale alla somma dei diametri apparenti del sole, e della luna veduti dalla terra. Bastano questi dati per determinare qualunque ecclisse, e per rappresentarsi come in una carta tutti i luoghi oscurati e le apparenze degli ecclissi secondo i varj luoghi della terra. Mentre l'ombra passa sul disco della terra, un

dato luogo *P* sarà portato intorno per un paralello (perchè la terra, come si dirà, gira sul proprio asse); sì che quando *P* entra nella penombra l'ecclisse comincia, e finisce quando n'esce, ec. Questo modo di calcolare l'ecclisse solare, come comparirebbe ad un osservatore situato sulla luna, è generalmente abbracciato dagli astronomi; molto più che inventati varj metodi grafici, riesce oggi più facile di descrivere i fenomeni e le apparenze dell'ecclisse pe' diversi luoghi della terra (Vedi Biot, *Astron. Fis.*, tomo II, l. 2, cap. 16 e 18; e Delambre, *Astron. teor. e prat.*, tomo II, cap. 26).

178. La luna è così piena di macchie e di prominenze e d'ineguaglianze, che gli astronomi ne hanno formato una carta che han chiamato *selenografica*. Langrenio e Riccioli hanno espresso le macchie principali della luna coi nomi dei più notabili filosofi dell'antichità, o dei più illustri uomini tra i moderni, come di Archimede, d'Eratostene, di Galileo, di Keplero, ec.; ed Hevelio ha indicato le varie ineguaglianze o macchie lunari nella sua *Selenografia* coi nomi dei luoghi geografici, come di mari, di monti, laghi, ec. Ora per mezzo delle macchie della luna si è ricavato che la luna descrivendo la sua orbita presenta sempre lo stesso emisfero o disco a noi che siamo sulla terra; il che non potrebbe accadere se essa percorrendo la sua orbita non girasse nello stesso tempo intorno al proprio asse, e a rotare intorno a sè stessa non impiegasse esattamente lo stesso tempo che impiega a descrivere la sua orbita. Imperocchè, posto lo spettatore in *S*, sia *SA* (*fig.* 41) il raggio vettore che unisce i due centri della terra e della luna, e determina l'emisfero lunare, che da noi si vede come un cerchio che ne forma la superficie o disco. Se la luna passando da *A* in *B* nella sua orbita non rotasse intorno a sè stessa, la retta *AD* piglierebbe la situazione *Bd*, e lo spettatore in *S* non vedendo più come prima la luna lungo *DA*, o *dB*, ma lungo *eB*, non vedrebbe più lo stesso emisfero che vedea quando la luna era in *A*, o sia il disco lunare osservato in *B* risulterebbe da una parte del primo emisfero veduto in *A*, e da una parte nuova e non ancora veduta della superficie lunare. E così successivamente, come la luna andrebbe camminando sulla sua orbita si andrebbe successivamente rinnovando il suo disco, nè potrebbe mai avvenire che lo

spettatore in *S* osservasse costantemente lo stesso disco o emisfero lunare. Ma se al contrario come la luna cammina nella sua orbita da *A* in *B*, si rivolgesse intorno a sè stessa, allora l'asse *Bd* piglierebbe la posizione *Be*, o sia lo spettatore per *eB* vedrebbe la luna come prima la vedea per *DA*, o sia proseguirebbe ad osservare lo stesso emisfero. E così rotando successivamente la luna, si avanza nella sua orbita, e andrà perfezionando tutta la sua rotazione, quando compie il giro intero della sua orbita, e però da noi veder si deve sempre il medesimo disco o emisfero. Ove dunque siamo certi dall'osservazione che la luna presenta sempre il suo disco ai nostri sguardi, se ne deve di certo conchiudere ch'essa ruota intorno al proprio asse, e compie la sua rivoluzione esattamente nel medesimo tempo in cui descrive la sua orbita.

179. Ci è ragione di credere che i satelliti di Giove e di Saturno sien forniti di un movimento di rotazione intorno al proprio asse, e che al par della luna compiscano la loro rotazione nello stesso tempo che percorrono tutta la loro orbita. Maraldi accorgendosi che una macchia sul disco del quarto satellite di Giove ritorna periodicamente, come egli si move intorno a Giove, ne conchiuse che questo satellite rotava intorno al proprio asse, come ha meglio dimostrato Herschell colle sue osservazioni sopra i satelliti di Giove. Col favore de' suoi telescopj vide che la luce dei satelliti non era sempre della stessa forza e splendore, e che costantemente decresceva o pure si aumentava come essi ritrovavansi nella medesima posizione in riguardo a Giove, ed ebbe l'agio in più rivoluzioni di notare il *minimum* ed il *maximum* di loro luce nelle stesse situazioni. Ora da questi cangiamenti periodici di luce egli ritrasse che i satelliti girano intorno ai loro assi, e che il periodo della loro rotazione è eguale al tempo della loro rivoluzione intorno a Giove. Poichè presentando ciascun satellite lo stesso emisfero a Giove, deve presentare a noi sulla terra successivamente tutti i punti della sua superficie, non altrimenti che avviene per la luna, che rivolgendo alla terra lo stesso emisfero presenta al sole tutti i punti della sua superficie.

180. Guidato dallo stesso ragionamento Domenico Cassini avea argomentato prima di Herschell che il quinto satellite di Saturno rotava intorno a sè stesso, ma oggi

dalle osservazioni fatte da Bernard in Marsiglia nel 1787, e più d'ogni altro da quelle di Herschell, che vide in 10 rivoluzioni di questo satellite periodicamente e nelle stesse situazioni gli stessi cangiamenti di luce, si tiene come certa la rotazione del quinto satellite. In questo modo dal moto di rotazione della luna, dei satelliti di Giove e del quinto di Saturno si argomenta probabilmente che sia una legge generale, la quale si conviene a tutte le lune o pianeti secondarj, quella di rotare intorno ai proprj assi nel medesimo tempo che descrivono le loro orbite intorno ai loro pianeti primarj.

181. Ma tra i movimenti di rotazione dei satelliti è in particolare da porre mente a quelli della nostra luna che ci dà a vedere alcune varietà di apparenza. Queste provengono dalle macchie del disco lunare vicine agli orli, che ora spariscono ed ora riappariscono, facendo delle oscillazioni periodiche che diconsi *librazione* della luna, ed hanno la loro origine da una illusione. È da ricordare che sebbene il movimento di rotazione della luna sia uniforme, pure quello sulla sua orbita sta sottoposto a varie ineguaglianze. Di ciò avviene che se la luna movendosi da *A* in *B* (*fig.* 41) accelera il suo corso, l'asse *Bd* non ha il tempo di mettersi nella situazione *Be*, e però andrà a collocarsi tra *d* e il punto *e*. Allora guardandosi da noi la luna non più si vede precisamente lo stesso emisfero che si era veduto in *A*, ma disparisce un segmento dell'orlo orientale del disco lunare che prima si vedea, e apparisce una porzione eguale dell'orlo occidentale della luna che prima non si vedea. Il contrario accade se la luna ritarda in luogo di accelerare il suo corso. Per lo che, per l'ineguaglianze cui è sottoposto il moto della luna nella sua orbita, deve risultare che ora si vede un orlo occidentale che non si vedea, e ci si nasconde un orlo orientale che si vedea, o che ci si presenta un orlo orientale che prima non si osservava, e ci si occulti un orlo occidentale che prima si vedea. Comparisce in somma, come se la luna stando ferma sull'asse *fe*, si volti oscillando ora verso l'oriente e ora verso l'occidente, e questa apparenza porta il nome di *librazione della luna in longitudine*.

182. L'asse della luna oltre a ciò non è perpendicolare esattamente al piano della sua orbita, e però secondochè questo asse ci presenta la sua più grande o

piccola obbliquità nei varj punti dell' orbita lunare, ci discopre alternativamente ora l' uno e ora l' altro polo di rotazione, e quelle parti che all'uno ed all'altro polo sono vicine. Questo fenomeno dicesi *librazione in latitudine*, che non è reale, ma un' illusione, giacchè non nasce da un' alterazione reale nell' asse di rotazione.

183. Finalmente come l' osservatore non si trova nel centro, ma nella superficie della terra; così il raggio visuale tirato dall' occhio al centro della luna ne incontra e taglia la superficie in parti, che sono diverse secondo ch' è diversa l' altezza della luna sopra l' orizzonte. E però come la luna nasce e tramonta ci mostra alcuni punti prima verso il suo orlo superiore, che vanno in fine a sparire, e poi altri verso il suo orlo inferiore. Così nel suo moto diurno il globo della luna pare che oscilli intorno al raggio vettore che unisce i due centri, della luna e della terra, e questo fenomeno dicesi *librazione diurna*. Le tre librazioni adunque han luogo per noi sulla terra, nè si vedrebbero da un osservatore nel centro della luna, vedendo un moto di rotazione uniforme.

184. Non solo veggonsi delle macchie nella luna ad occhio nudo, ma si distinguono coll' ajuto del telescopio e monti e caverne e vulcani, dei quali non si può dubitare per cagione delle ombre che essi gittano. Nel primo e secondo quarto, quando il sole splende obbliquamente sulla faccia della luna, le prominenze gittano un' ombra triangolare nella direzione opposta a quella del sole, ed al contrario le cavità sono oscure dalla parte ch' è verso il sole, ed illuminate dalla parte opposta. Le ombre diventano più brevi a misura che il sole diviene più direttamente opposto alla faccia anteriore della luna e spariscono alla fine nel plenilunio. Compariscono di nuovo le ombre nel terzo ed ultimo quarto, ma tutte cadono verso il luogo opposto della luna; sì che sempre le stesse prominenze sono oscure, ed ombreggiate dalla parte più lontana del sole. Finalmente si osserva che le prominenze sono illuminate più presto, e le cavità più tardo del resto della superficie lunare; il che dimostra chiaro che la superficie lunare è ineguale, e sparsa di monti e di cavità. Hevelio ed Herschell hanno trovato il modo di misurare l' altezza dei monti lunari per mezzo delle ombre projettate dagli

stessi monti; e giusta il comune sentimento le montagne della luna sono molto più alte in proporzione al raggio della medesima di qualunque montagna che sia sopra la terra. Ma Herschell porta opinione che, eccettuato pochi, d'ordinario i monti della luna non sono più alti di un mezzo miglio.

Herschell scoprì nel dì 19 aprile del 1787 tre vulcani nell'oscura superficie della luna, due dei quali parvero di essere vicino alla loro estinzione, e uno mostrò di essere in eruzione e in tutta attività; percioechè si vedea una materia lucida simile ad un pezzo di carbone rovente coperto di una cenere finissima, e con quel colore rosso che ha un tale carbone nel tempo di giorno. Anzi era tanta la copia della materia lucida eruttata dal vulcano, che le parti d'attorno e tutti i luoghi circostanti alla montagna vulcanica comparivano alquanto illuminati. Nè queste apparenze si veggono di rado, perchè soglionsi spesso vedere dei punti scintillanti che fan sembianza di vulcani (V. le *Trans. filos.* 1787).

Giova qui di avvertire che ci ha una macchina chiamata *lunarium*, con cui si mostrano sensibilmente i moti di traslazione e di rotazione della luna, le fasi, gli ecclissi, il modo con cui l'orbita lunare è inclinata all'ecclittica, il moto retrogrado dei nodi della luna, la rivoluzione periodica e sinodica, ec., e gli altri fenomeni della luna.

CAPO IV.

DELLE STELLE E DELLE COMETE.

185. Riguardandosi le stelle come tanti punti fissi nel cielo, che conservano invariabilmente la stessa distanza rispettiva tra loro, si sono considerate dagli astronomi come il mezzo più opportuno per avvertirci e darci la misura e il rapporto del moto degli altri corpi celesti, come sono i pianeti che girano e si muovono. E perchè non si potea esattamente definire il moto dei pianeti, se con precisione non era determinata la posizione delle stelle; perciò si sono studiosamente rivolti a segnare la posizione di ciascuna stella col rapportarla ai due cerchi massimi della sfera celeste, quali sono l'equatore e l'ecclittica. In questo modo si conosce per la distanza

delle stelle dall' ecclittica e dall' equatore la loro certa e ben determinata situazione, e dalla loro posizione si valuta poi il moto dei pianeti e degli altri corpi celesti.

186. Si rapporta una stella qualunque all' equatore per mezzo di un cerchio massimo, che si parte dal polo, passa pel centro della stella e taglia perpendicolarmente l'equatore, che dicesi *cerchio di declinazione*. Nella *fig.* 32 il circolo *PSA*, che si parte dal polo *P*, passa pel centro della stella *S*, e taglia l'equatore *QEQ'* normalmente in *A*, si dice il circolo di declinazione della stella *S*. Ora l'arco *SA* di questo cerchio compreso tra la stella *S* e il punto *A* dell' equatore si dice *declinazione della stella S*; e in generale si dice *declinazione* di un astro quell'arco del cerchio di declinazione compreso tra esso e l'equatore, distinguendo la declinazione in *australe* e *boreale*, secondo che l' astro si trova più vicino al polo australe o al boreale. E perchè non di rado accade che più stelle trovansi nel medesimo parallello, o sia alla medesima distanza dall' equatore, ed hanno la medesima declinazione; così per distinguere l'una dall'altra si è introdotto un altro elemento, o sia l' arco dell' equatore compreso tra il circolo di declinazione e il punto dell' equinozio, che si chiama l'*ascensione retta della stella*. Così l'arco *EA* dell'equatore tra l'equinozio *E* e il circolo di declinazione *PSA* della stella *S* si chiama l' ascensione retta di *S*, e per mezzo dell' ascensione retta, la quale si computa sempre dal punto di ariete nel senso del moto del sole d' occidente in oriente sopra l' equatore, si distingue la stella *S* da qualunque altra che abbia la stessa declinazione *SA*.

187. Si determina parimente la posizione delle stelle riferendosi all' ecclittica per mezzo di un gran cerchio che partendosi dal polo dell' ecclittica passa pel centro della stella, e taglia normalmente l' ecclittica, il quale dicesi *cerchio di latitudine*. Nella *fig.* 32 il cerchio *HSL*, che si parte da *H*, passa per *S* e cade perpendicolarmente sopra *cEc'*, rappresenta il cerchio di latitudine della stella *S*. Ora l'arco *SL* si dice la latitudine della stella *S*, e l'arco *EL* dell'ecclittica si chiama la *longitudine della stella S*; e in generale l' arco del cerchio di latitudine compreso tra la stella e l'ecclittica appunto come *SL* si dice *latitudine* di un astro, e l' arco dell' ecclittica compreso tra l' equinozio di primavera e il

circolo di latitudine, come è appunto EL, si distingue col nome di *longitudine* di un astro, la quale si computa sempre dall'equinozio di primavera secondo l'ordine dei segni. Una stella adunque resta in sì fatto modo inchiodata ad un punto del cielo per mezzo della latitudine e longitudine, della declinazione e ascensione retta.

188. Ipparco confrontando le sue colle osservazioni di Aristillo e di Timocari fatte 155 anni innanzi, si accorse il primo che le stelle mutavano ascensione retta e declinazione, e faceano vista di muoversi lungo l'ordine dei segni d'occidente in oriente, o, come dicesi, in longitudine. La stella detta la *spiga della vergine*, che secondo Timocari precedea di 8° l'equinozio d'autunno, giusta le osservazioni d'Ipparco n'era lontana di 6°, quasi che si fosse avanzata di 2°. Tolomeo, che venne dopo Ipparco, confermò lo stesso fenomeno, ove si mise a paragonare le posizioni delle stelle da esso lui osservate con quelle ch'erano state già determinate 260 anni prima da Ipparco. E successivamente dal confronto delle osservazioni di Albatenio, di Ticone, di Flamstedio, di La Caille e di tutti gli astronomi è oggi fuor di dubbio che le stelle fan sembianza di mutare declinazione e ascensione retta, e di avanzarsi giusta l'ordine dei segni. Ma un sì fatto movimento, che hanno in comune tutte le stelle, si riguarda per apparente, ed è rappresentato dal moto dei poli dell'equatore intorno a quelli dell'eclittica.

189. Prima di venire a questo moto, sia nella *fig.* 31 l'eclittica cEc', e si tenga per costante l'angolo $c'EQ'$ di sua obbliquità; ma si ponga il nodo E sospinto da un moto retrogrado, onde da E passi procedendo indietro in e. Allora l'equatore QEQ' muta posizione, e piglia la situazione qeq', e le stelle senza cangiar latitudine sortiscono una mutazione nella longitudine, declinazione e ascensione retta. In fatti ove il nodo da E passa in e, e l'equatore da QEQ' in qeq', la declinazione della stella S da SA si muta in Sa, l'ascensione retta da EA si cangia in ea, la longitudine EL si converte in eL, e solamente resta costante la latitudine SL della stella S. Segue in prima da ciò che le stelle fan sembiante di muoversi in longitudine; perciocchè non supponendo che il nodo cammini retrogradando, ci pare che le stelle si allontanino dal nodo avanzandosi secondo l'ordine dei

segni. In fatti tenendo per costante l' intersecazione E dell' ecclittica coll' equatore, ove E passa in e, ci pare il punto ♈ siesi avanzato giusta l' ordine dei segni, e nel senso della longitudine, della quantità eE, come si dimostra dalle osservazioni. La costellazione di ariete, che nei tempi d' Ipparco corrispondeva all' equinozio di primavera, oggi più non vi corrisponde, e comparisce avanzata più di un segno. Che se gli astronomi chiamano ancora il punto d' intersecazione dell' ecclittica coll' equatore il *punto d' ariete*, questo da loro si fa per conformarsi all' antico linguaggio, ma non già per indicare che il sole nell' equinozio di primavera si trova nel segno di ariete. È in secondo luogo da riflettere che il tempo dell' equinozio anticipa per ciascun anno. Imperocchè il sole partendosi da E non ritorna all' equinozio dopo aver descritto tutta la sua orbita, ma ritorna all' equinozio in e, restandogli ancora a percorrere l' archetto eE per perfezionare la sua orbita, e questo ritorno anticipato del sole di un equinozio ad un altro per ciascun anno si chiama il fenomeno della *precessione degli equinozj*, si valuta di 50″ in ciascun anno, e produce la differenza tra l' anno tropico e sidereo da noi indicato nel num. 132.

190. Questo moto retrogrado dei punti equinoziali dipende dal moto del polo dell' equatore intorno a quello dell' ecclittica. Di fatto sia ♈Q♎ (*fig.* 39) l' equatore, ♈E♎ l' ecclittica, P il polo dell' equatore, e P' quello dell' ecclittica; allora PCP' sarà l' obbliquità dell' ecclittica sopra l' equatore. E però se, restando costante questo angolo, si fa descrivere all' asse CP una superficie conica attorno all' asse CP', in modo tale che P descriva un cerchio perpendicolare a questo asse, un sì fatto moto trasporterà l' intersecazione ♈ di questi due piani in tutti i punti della circonferenza dell' ecclittica senza produrre alcun cangiamento nella loro inclinazione. Nella *fig.* 32 girando il polo P dell' equatore intorno a quello H dell' ecclittica per PP''', ec., come il polo P è sempre distante di 90° dall' equatore, è di necessità che questo si avanzi e tagli in un altro punto l' ecclittica, come si vede in e passando l' equatore da QQ' in qq', e così successivamente. Ora se dassi (*fig.* 39) al polo P sul suo cerchio il moto annuo dei punti equinoziali, e fassi P muovere nel senso ♈♓♒ contro l' ordine de' segni,

il punto o intersecazione ♈ andrà nella stessa guisa retrogradando sull'ecclittica, e così il moto del polo, che ha luogo nel cerchio $P\,P_{,}\,P_{,,}$ paralello all'ecclittica in 25868 anni, rappresenterà la precessione e 'l cangiamento di declinazione e di ascensione retta delle stelle, e il loro moto apparente in longitudine.

191. Oltre al moto che sembrano avere le stelle in longitudine, e all'alterazione a cui va sottoposta la loro declinazione e ascensione retta per cagione del precedere degli equinozj, o di altra causa che possa apparentemente turbare la posizione delle stelle, Bradley scoprì una irregolarità periodica nella loro declinazione e ascensione retta, che alcuna volta accresce e talora diminuisce l'effetto della precessione, e dipende dal moto retrogrado dei nodi della luna nello spazio di 18 in 19 anni (num. 164). Come Bradley comunicò questa scoperta a Machin, questi tenendo presente tutte le osservazioni fatte da Bradley rappresentò una tale novella irregolarità della posizione delle stelle in riguardo all'equatore per mezzo del movimento circolare, o meglio in una ellisse del polo dell'equatore intorno al suo luogo medio come centro. Siccome l'obbliquità dell'equatore sull'ecclittica non si trova costante in più secoli; così bisogna che si cangi (*fig.* 39) l'angolo PCP', in maniera che ne rappresenti tutte le variazioni; o, in altri termini, sono da considerarsi P e P' come i poli medj dell'equatore e dell'ecclittica esenti di ogni ineguaglianza, ed è da supporre che i poli veri si muovono intorno a questi. Si metta adunque il polo vero ϖ dell'equatore in moto intorno al polo medio P in modo, che ove il nodo ascendente della luna è in ♈ sull'ecclittica, o sia corrisponde all'equinozio di primavera, il polo apparente ϖ si trovi nel solstizio di state, o sia 90° indietro. A misura che il nodo retrograda sull'ecclittica, il polo siegue il suo moto, tenendosi sempre a 90° di distanza. Così stando il nodo in ♑ o tropico di capricorno, il polo ϖ giunge in ϖ', e corrisponde al punto di ♈. E così successivamente in 18 anni e quasi otto mesi i nodi della luna compiono la loro rivoluzione, e il polo ϖ gira intorno a P. L'orbita che ϖ descrive è una piccola ellisse, di cui il grand'asse $\varpi\varpi''$ è sempre tangente al cerchio di latitudine guidato per i due poli PP' dell'equatore e dell'ecclittica, e 'l più piccolo asse è tangente al cir-

colo $P_{,} P_{,,}$ su cui il polo dell'equatore si muove parallelamente all'ecclittica. Questi due assi sono piccoli, perchè il più grande si valuta 18″, e secondo Maskeline 19″, e 'l più piccolo di 13″.

Il giro dunque del polo P dell'equatore pel circolo parallelo all'ecclittica fa retrogradare equabilmente gli equinozj senza cangiare l'obbliquità dell'equatore sull'eclittica, perchè la distanza tra P e P' è sempre la stessa; ma il movimento del polo vero ϖ, che gira in una ellisse intorno a P, mentre che questo si muove in quel circolo, fa sì che ϖ ora sia più vicino a P' polo dell'ecclittica, e ora ne sia più lontano; e però cangia l'obbliquità dell'ecclittica periodicamente, e periodicamente allontana o pure avvicina l'equatore che si deve sempre mantenere alla distanza di 90° da ϖ. Or questo moto oscillatorio del polo vero intorno al medio si chiama *nutazione*, che in sostanza ad altro non si riduce che ad un piccolo e periodico cangiamento nell'obbliquità dell'ecclittica e nella posizione degli equinozj. E come sì fatti cangiamenti derivano da un piccolo sconcerto nella posizione dell'equatore, così è chiaro che vengasi per cagione della nutazione ad alterare la declinazione e l'ascensione retta delle stelle, che si rapportano all'equatore ed ai punti equinoziali (Vedi Biot, *Astr. Fis.* tomo II, l. 2, cap. 6).

192. Le stelle, siccome è stato scoperto da Bradley nel 1728, compariscono di descrivere periodicamente in un anno una circonferenza paralella all'ecclittica, che ha per centro il luogo vero in cui trovansi esse stelle, e un sì fatto movimento apparente e periodico delle medesime si chiama *aberrazione*. Le stelle situate nel polo H dell'ecclittica (*fig.* 32) o vicino a questo polo fan sembianza di descrivere in un anno il circolo $P'''P$, il cui centro è H luogo vero della stella, e il cui raggio veduto dalla terra è di 20″,25. Le stelle poi che trovansi in un luogo intermedio tra il polo H e l'ecclittica cEc', come sarebbe in S, non fan vista di descrivere in un anno un cerchio, ma un'ellisse; perciocchè la circonferenza da esse descritta, come si projetta nei cieli, apparisce un'ellisse. L'asse maggiore di questa ellisse è costantemente paralello all'ecclittica e sempre di 40″,5; ma l'asse minore, il quale è sempre perpendicolare all'ecclittica, si va facendo più piccolo, come

le stelle trovansi più lontane dal polo *H*, o sia più vicine all' ecclittica. Poichè dall' osservazione si è ritratto che l' asse minore dell' ellisse, che apparentemente descrivesi da ciascuna stella, sta al maggiore, che è costantemente di 40″,5, come il seno della latitudine o della distanza della stella dalla ecclittica sta al raggio o all' unità. Decrescendo adunque la latitudine, o sia trovandosi le stelle più vicine all' ecclittica, va in proporzione tale menomandosi l' asse minore dell' ellisse, che ridotta a zero la latitudine, o sia per le stelle che stansi sull' ecclittica, l' asse minore svanisce, e l' ellisse si riduce ad una linea retta, ch' è rappresentata dal solo asse maggiore di 40″,5. E però il moto apparente delle stelle in un anno, a cagione dell' aberrazione, per le stelle situate nell' ecclittica apparisce di aver luogo sopra una linea retta; per le stelle interposte all' ecclittica, e al polo della medesima, sembra di farsi in un' ellisse tanto meno schiacciata, quanto le stelle sono collocate più lontane dall' ecclittica; e finalmente per le stelle poste nel polo dell' ecclittica, o vicino, pare di avverarsi in un cerchio perfetto. Ma sempre egli è vero che il luogo vero della stella si riposa nel centro del cerchio o dell' ellisse, o pure nel punto di mezzo della linea retta; di modo che il luogo apparente della stella non sarà mai nel *maximum* di sua distanza più lontano di 20″,25. Non è difficile dopo ciò comprendere i cangiamenti periodici che si osservano nelle stelle per ragione dell' aberrazione. Se la stella *H* comparisce descrivere il cerchio *P P‴*; e se la stella non si vede in *S*, ma nei punti successivi di un' ellisse che ha per centro il luogo vero *S*, è chiaro: 1.° Che le stelle in virtù dell' aberrazione trovansi in ciascun anno periodicamente ora più e ora meno lontane dall' ecclittica, secondo che descrivono l' una o l' altra metà del cerchio o dell' ellisse; e però che venga periodicamente accrescendosi o menomandosi la loro latitudine, che si misura dalla distanza perpendicolare tra esse e l' ecclittica. 2.° L' aberrazione in latitudine ha luogo nel senso dall' asse minore dell' ellisse, la quale descrivesi apparentemente dalle stelle; perciocchè l' asse minore è perpendicolare all' ecclittica come il cerchio di latitudine. Ora siccome l' asse minore va decrescendo come le stelle trovansi più vicine all' ecclittica; così è chiaro che l' aberrazione in latitudine non

è eguale per tutte le stelle, ma è diversa in ciascuna secondo che più o meno stansi lontane dal polo dell'ecclittica. E da ciò nasce che per cagione delll'aberrazione pare che le stelle non conservino tra loro la stessa rispettiva distanza. 3.° Perchè le stelle appariscono di camminare sulla circonferenza di un'ellisse o di un cerchio, o lungo una linea retta, ne segue che cangiano di luogo, e il cerchio, il quale si parte dal polo e va ad incontrare le stelle ora in un luogo e ora in un altro, cade normalmente sopra punti diversi dell'equatore; e perciò viene a comparire diversa la declinazione e la loro ascensione retta. L'aberrazione adunque non solo altera la declinazione e l'ascensione retta e la longitudine, come fanno la precessione e la nutazione, ma altresì la latitudine. A questo oggetto gli astronomi hanno stabilito le tavole e i metodi per cui trovansi valutate le quantità, dalle quali resta alterata la posizione di ciascuna stella o in latitudine o in longitudine, o in ascensione retta o in declinazione, per cagione dell'aberrazione nei singoli giorni dell'anno, affinchè data la posizione apparente della stella ridurre si possa colle debite giunte o sottrazioni al luogo vero e reale (Vedi Delambre, *Astron. teor. e prat.* tomo III, cap. 30; e Biot, *Astron. fis.* tomo III, l. 4, cap. 11).

193. Nè qui è da tacersi che i pianeti ancora stan soggetti al cangiamento apparente di luogo per l'aberrazione; sì che oggi gli astronomi nel calcolare il luogo di un pianeta non trascurano di tenerne conto. Poichè si sa che per Mercurio l'effetto dell'aberrazione giunge a 60″, per Venere a 43″, a 36″ per Marte, a 29″ per Giove, a 26″ per Saturno, a 25″ per Urano, e a 20″ pel sole.

Dalle quali cose tutte ben si comprende che non basta osservare la latitudine e la longitudine, la declinazione e l'ascensione retta delle stelle; ma i luoghi osservati debbonsi poi spogliare dagli effetti della precessione, della nutazione, dell'aberrazione, ec., per determinarsi con esattezza la vera posizione e il luogo vero delle stelle. A fare le quali cose non mancano gli astronomi nè di metodi nè di tavole, molto più che oggi si sono stabilite con più precisione tali quantità (Vedi Delambre, *Astr. teor. e prat.* tomo III, cap. 31; Biot, *Astron. fis.* tomo II, lib. 2).

194. I movimenti dei quali finora abbiamo fatto menzione, sono generali, e riguardano in comune tutte le stelle; ma a parte di questi si sono scoperti in molte stelle alcuni piccoli e lentissimi movimenti proprj, in virtù dei quali esse cangiano continuamente la loro rispettiva distanza. Comparando Mayer le osservazioni da esso dirizzate sopra 80 stelle con quelle fatte da Roemero sulle medesime, ne inferì che queste 80 stelle erano fornite di un moto proprio lentissimo; ed Herschell riferendo le sue osservazioni sopra 56 stelle a quelle di Mayer e di Roemero, venne a confermarlo. Ma più d'ogni altro Maskeline è stato quegli che osservando 35 stelle, e paragonando le sue osservazioni a quelle di Bradley e di Flamstedio, ne stabilì l'annuale moto proprio in ascensione retta, e trovò che Sirio ed Arturo si muovono verso il sud, il primo della quantità di 1″,20, e il secondo di 2″,01, che sono dei movimenti notabili, e sopra i quali non si può sospettare alcuno equivoco. Altre stelle vanno di giorno in giorno scoprendo gli astronomi fornite di un movimento proprio, di cui sino ad oggi non si conosce la cagione. La Lande, Prevot ed Herschell attribuirono un movimento lentissimo al sole, e con tal movimento intesero a dichiarare perchè le stelle faceano sembianza di muoversi. Di fatto è sembrato loro che il sole movendosi verso la stella λ di Ercole, si facea benissimo ragione del moto di 30 e più stelle. Ma è da confessare che i moti di altre stelle non poche non si possono conciliare col moto del sole verso λ di Ercole, e più di ogni altro che i movimenti proprj delle stelle che si sono scoperti, facendosi in sensi diversi e talvolta contrarj, e senza alcuna nota legge, e in luoghi tanto da noi remoti e lontani, niente di certo si può finora conchiudere per ispiegare i loro moti.

195. Le stelle fisse, come quelle che compariscono agli occhi nostri forniti di gradi diversi di grandezza e di splendore, si sono distinte in più classi. Le più grandi insieme e le più lucide diconsi di *prima grandezza*, e quelle che appariscono ad occhio nudo le più piccole e le meno splendide, si chiamano di *sesta grandezza*; di modo che le altre intermedie giusta l'ordine di loro differente grandezza e splendore si segnano col nome di *seconda*, *terza*, *quarta* e *quinta grandezza*. Le stelle poi che non si possono vedere senza l'ajuto del tele-

scopio portano il nome di *stelle telescopiche*, e queste pure si distinguono e riducono in classi di *settima*, *ottava*, ec., *grandezza*. Le stelle che ad occhio nudo, e che cogli ordinarj telescopj compariscono semplici talvolta per mezzo del telescopio o dei telescopj di gran forza, si risolvono in due o in tre o in più stelle, e però si chiamano *stelle doppie*, *triple*, *quadruple*, ec., *multiple*. Lasciando stare che Maskeline ha osservato α di Ercole, e Hornsby κ di Boote come doppie, e molte altre ne han scoperto Cassini, Mayer e Pigott e altri, il solo Herschell ne ha descritto 700, delle quali appena erano conosciute 42. Discoprì egli che gli astri da cui son formate le stelle multiple hanno vario il colore, e diversa la grandezza e la distanza, ma una tale mutua dipendenza, che compongono dei sistemi particolari; giacchè hanno nello spazio gli stessi movimenti proprj, e i più piccoli girano intorno ai grandi, come Giove, Saturno, ec., girano intorno al sole (Vedi le *Trans. filos. per gli anni* 1803 e 1804). Con questo intendimento Herschell figlio e Sout nel 1825 hanno pubblicato le osservazioni di 380 stelle multiple. Per lo che gli astronomi sonosi rivolti a queste ricerche ed a stabilire le rivoluzioni di tali stelle (Vedi Arago sulle stelle multiple nella *Conosc. dei tempi per l'anno* 1828). Di fatto Bessel ha già dimostrato colle sue osservazioni, che la stella doppia del *cigno* si avanza con gran celerità, e che le due stelle in 60 anni hanno descritto una gran parte della loro orbita intorno al loro comune centro di gravità. Indi è che Savary ha cercato di determinare le orbite che due stelle vicine l'una all'altra descrivono intorno al loro centro di gravità (V. *Conosc. dei tempi per l'anno* 1830. Addiz. p. 65 e 163).

196. Herschell ha scoperto alcune stelle circondate di un'atmosfera alquanto lucida e di una estensione notabile, ch'esso chiama *stelle nebulose* o *stelle ad aureole*. Secondo ch'egli attesta, ai 3 di novembre 1790 vide una stella di 8ª grandezza nel centro di un'atmosfera alquanto lucida e di una forma perfettamente circolare, di sorte che non si può dubitare che l'atmosfera lucida si appartenga alla stella come centro; e di tali stelle ne descrive più di 70. Venne quindi egli in opinione che una stella nebulosa altro non sia che una stella immersa e galleggiante in un fluido lucido di una natura a noi

incognita, e che la stella del centro sia stata formata dalla materia lucida circostante ammassata e condensata (Vedi le *Trans. Filos. per l'anno* 1791).

197. Non accade di rado che osservando il cielo ad occhio nudo, o pure coi telescopj ordinarj, si veggano alcune macchie simili a una nuvoletta bianca, che si dicono *nebulose*, le quali guardate coi telescopj, almeno con quei che hanno gran forza, si risolvono in stelle. Galileo guardando coll' occhio armato di telescopio le nebulose descritte da Tolomeo, trovò 38 stelle nella nebulosa del Cancro, 14 nella nebulosa della testa di Orione, e 9 in quella dell' occhio del Sagittario. Il nostro Hodierna ne aggiunse certamente cinque alle dieci scoperte prima di lui, e scoprì nel 1644 la nebulosa che si trova nel mezzo della spada di Orione, che di ordinario si attribuisce ad Huyghens, sebbene l'abbia questi descritto dopo nel 1656. Non poche altre nebulose sono state scoperte da Simon Marius, Cassini, Halley, La Caille, Messier, Mechain, ec., e più di ogni altro da Herschell che ne ha recato un catalogo di più di 2000. Alcune nebulose osservate da Herschell co' suoi maravigliosi telescopj gli sembrarono composte di stelle tutte distinte, ma situate da vicino e quasi ammassate, ch' egli nel suo linguaggio chiama *grappoli di stelle*. La forma di tali grappoli è rotonda, e la compressione e l'ammassamento, secondo ch'esso attesta, sembrano successivi, e fatti gradatamente e col tempo, e dalla circonferenza al centro, a differenza d' alcuni gruppi di stelle che non hanno alcuna figura regolare. Ci è di bisogno della forza dei suoi telescopj per risolvere queste nebulose in stelle, o in gruppi, o in grappoli di stelle; e ciò non ostante ci sono alcune nebulosità che ancora non si possono distinguere in stelle dagli stessi telescopj di Herschell (V. Sopra la diversa specie di nebulosità conosciute da Herschell le *Trans. Filos. per l'anno* 1811). La *via lattea*, ch' è una luce bianca, di forma irregolare, che circonda il cielo a guisa di una cintura, siccome ognuno può vedere ad occhio nudo, si risolve in tante stellette, quando è osservata col telescopio. Anzi Herschell con un telescopio di 20 piedi di fuoco l' ha veduta come un' immensa collezione di stelle inegualmente sparse, o pure in alcuni punti raccolte. Rivolgendo questo celebre astronomo il suo telescopio verso

una parte della via lattea la quale era mediocremente chiara, contò dentro il campo del telescopio ora 60, ora 70, 84, 90 e sino a 110 stelle; e per un calcolo medio stabilì che in una sola vista si riscontravano 79 stelle. E però egli ne dedusse che lo spazio della via lattea compreso tra le stelle β e γ del Cigno racchiude due aggregati distinti di stelle che giungono a 331000. Tanto è prodigioso e immenso il numero delle stelle che si contengono in tutta la vasta nebulosità della via lattea. Non è quindi da recare maraviglia se Herschell si avvisava che la via lattea sia una nebulosità di cui il nostro sole e il nostro sistema solare formano una parte (V. le *Trans. Filos. per gli anni* 1785, 86, 89, 91, ec.).

198. Si osservano alcune stelle sottoposte ad un cangiamento periodico nell' intensità della loro luce, che perciò han sortito il nome di *stelle variabili* o *cangianti*. Non poche di tali stelle sono state osservate dagli astronomi; ma Goodricke, Pigott ed Herschell sonosi dagli altri distinti nello stabilirne e descriverne i periodi, i cangiamenti e le apparenze. La cangiante della balena in 333 a 334 giorni prova tutti i cangiamenti possibili dallo stato di 2ª grandezza sino a quello di 10ª, e meno ancora; Algol o la testa di Medusa passa in 2 giorni 48' o 49' da seconda grandezza a quarta o quinta; γ d'Antinoo passa da terza a quinta grandezza nel periodo di 7 giorni e 4 ore 1/4. Il periodo della cangiante del collo del Cigno è di 369 giorni e 21 ore, ec. (V. l'*Astr.* di La Lande).

Per ispiegare le apparenze e le fasi di queste stelle si sono immaginate più ipotesi. Credesi da alcuni che le stelle cangianti sieno notabilmente schiacciate e piatte, e presentando non di rado agli occhi nostri il loro taglio ci divengano invisibili, e talvolta più o meno ci diano a vedere della loro superficie, come accade per l' anello di Saturno. Pensano altri che qualche pianeta girando intorno a sì fatte stelle passi dinanzi il loro disco periodicamente, e periodicamente ci occulti la loro luce. Una terza congettura poi, che non pare molto improbabile, si è che le stelle cangianti rotino, e come sono piene di macchie, così nel girare ora ci mostrano una parte più oscura della loro superficie, e talora una macchia; d' onde si dichiarano tutte le irregolarità delle loro apparenze.

199. Non ci resta in fine che a far parola di alcune stelle le quali subitamente appariscono nei cieli, e poi dopo qualche tempo più non si veggono. Lasciando stare quelle che sono ricordate dagli antichi, egli è certo che nell'anno 1572 apparve nella costellazione di Cassiopea una nuova stella, la quale fu osservata da Cornelio Gemma, da Ticone, dal nostro Maurolico e da altri. Essa vincea in isplendore Sirio e in grandezza Giove; ma gradatamente andò mancando, e dopo 16 mesi interamente disparve. Si vide da principio di un colore bianco vivissimo, quindi di un giallo rossastro, e in fine di un bianco piombino. Lo stesso fenomeno si rinnovò nell'anno 1603; perciocchè si osservò tutto ad un tratto una stella di prima grandezza nella costellazione del Serpentario, che andò dicadendo di splendore, e dopo 15 mesi nel 1606 si spense. Per ispiegare l'apparizione e il disparire di queste stelle si sono anche recate innanzi più congetture, ma senza alcun fondamento.

200. Oltre alle stelle e i pianeti che da noi continuamente si veggono, ci hanno altri astri che appariscono in diversi tempi nei cieli, e venendo da lontane regioni sono da principio quasi impercettibili, e poi avvicinandosi al sole crescono in grandezza e celerità, e in seguito si vanno allontanando, e finalmente spariscono. Questi astri, che chiamansi *comete*, sono d'ordinario accompagnati da una nebulosità o atmosfera, di modo che distinguesi il corpo dell'astro, che dicesi il *nucleus*, dall'atmosfera o *testa* della cometa. Questa nebulosità talvolta piglia la forma di coda, e talora di crini o di barba; ond'è che portano il nome di comete *crinite*, *barbute*, ec. La coda delle comete suol essere in una direzione opposta al sole, sempre più lucida quando è vicina al sole, e pare composta di una materia molto rada; perciocchè veggonsi a traverso della medesima le stelle, e alcuna volta è di una lunghezza ed estensione molto notabile: la cometa in fatti del 1680 era seguíta da una coda la cui lunghezza calcolavasi eguale alla distanza che ci ha tra il sole e la terra.

L'apparente grandezza delle comete non è sempre la stessa. Non di rado sono quanto le stelle fisse, taluna è stata eguale in diametro a Venere, ed Hevelio fa menzione di quella osservata nel 1652, ch'era grande quanto la luna, sebbene di una luce pallida e scura. Il loro cam-

mino non è per tutte nella medesima direzione; percioc-chè alcune muovonsi giusta l'ordine dei segni, ed altre in senso contrario, e la loro velocità è varia per la ragione che camminano con una prodigiosa rapidità quando sono vicine al sole, ed ove se ne allontanano pigliano un moto, in riguardo a quello che aveano, lentissimo. Il certo è che le comete non sono meteore, come una volta credeasi, o accensioni che han luogo nella nostra atmosfera; perciocchè esse quando sono visibili, spuntano e tramontano come la luna, il sole e le stelle, partecipando così al moto comune e giornaliero della sfera, e sono perciò in regioni molto lontane dalla nostra atmosfera, e molto distanti da noi. E siccome la cometa del 1744 fu veduta illuminata in metà del suo disco e sottoposta a fasi come la luna, Venere, ec.; così si possono riguardare le comete come corpi opachi che ricevono la loro luce dal sole.

CAPO V.

DELLA PARALLASSE.

201. L'oggetto g (*fig.* 40) osservato da due luoghi o stazioni diverse S e T si riferisce a due punti diversi dello spazio d e A; ed in generale è a chiunque manifesto che un oggetto guardato nel medesimo tempo da due luoghi diversi e distanti tra loro si riferisce a due parti diverse dello spazio. L'angolo SgT misura la differenza dei due luoghi apparenti d, A, in cui si vede l'oggetto g da S e da T; perchè $SgT = dgA$; e in generale l'angolo formato dal concorso delle due rette guidate dalle due stazioni all'oggetto si chiama la *parallasse* dell'oggetto; e come varia quest'angolo, maggiore o minore viene a farsi in corrispondenza la diversità dei luoghi ai quali si rapporta e nei quali apparisce l'oggetto. Per lo che osservandosi lo stesso astro nel medesimo tempo da più osservatori situati in diversi punti della superficie della terra, ciascuno lo deve vedere in punti differenti del cielo, perchè lo guarda da punti differenti della terra. A togliere quindi questa differenza nelle osservazioni han pensato gli astronomi di riferire i corpi celesti a un punto fisso, qual è il centro della terra, o del sole; cioè a dire, di notare il luogo apparente degli astri,

quale sarebbe se osservati fossero dal centro della terra o del sole. Son quindi venuti gli astronomi a ridurre il luogo apparente degli astri come da essi si vede sulla superficie della terra al luogo in cui si vedrebbe se collocati fossero nel centro della terra o del sole. In questo modo il centro T della terra, e 'l punto S della sua superficie si riguardano come due stazioni diverse, e misurato l'angolo SgT, o sia la parallasse, si calcola la differenza dA, e si riduce il luogo apparente A veduto da S al luogo d, come sarebbe se l'astro g fosse stato osservato dal centro T.

Ora questa parallasse, la quale risulta dall'angolo SgT, che sottende il raggio ST della terra ed esprime la differenza del luogo apparente di un astro veduto dalla superficie e non dal centro della terra, si chiama *parallasse diurna*.

202. Per ben dichiarare sì fatta parallasse rappresenti HS, ec. (*fig.* 40) la terra, T il suo centro, S un punto qualunque della sua superficie, Z il zenit, ZST una verticale, ORG una parte dell'orbita della luna, Prg una parte dell'orbita di un pianeta, e $ZBDA$ una parte della sfera celeste a cui si riferiscono i pianeti, ec. Ciò posto, se l'astro g veduto da S si trova nell'orizzonte, cioè a dire nella linea SA, che forma un angolo retto colla verticale ZS, allora la parallasse SgT si chiama *orizzontale*, e generalmente la parallasse di un astro posto nell'orizzonte si dice orizzontale. La parallasse poi SrT di un astro r situato sopra l'orizzonte, o sia ad una distanza minore di 90° dal zenit Z, si distingue col nome di *parallasse di altezza*. Ma l'una e l'altra parallasse, l'orizzontale e quella di altezza, si calcola collo stesso metodo. Così essendo, misurata, la parallasse di altezza ba dall'angolo $bra = SrT$ si ha $Tr : TS ::$ sen $TSr =$ sen rSZ : sen SrT, o sia sen $SrT = \frac{TS \operatorname{sen} rSZ}{Tr}$. E parimente per la parallasse orizzontale dA, ch'è misurata da TgS, si ha $Tg : TS ::$ sen $TSg = R$ raggio : sen TgS, e però sen $TgS = \frac{TS}{Tg} \times R$.

203. Che se ci piace di rapportare l'una all'altra parallasse, si potrà stabilire la seguente proporzione $R = 1$: sen TgS parallasse orizzontale :: sen rSZ o della distanza apparente dell'astro dal zenit : sen TrS parallasse dell'al-

tezza. E perchè il seno della distanza dal zenit è eguale al coseno dell'altezza apparente dell'astro sopra l'orizzonte per la ragione che l'uno è complemento dell'altro; perciò il raggio sta al seno della parallasse orizzontale come il coseno dell'altezza sta al seno della parallasse di altezza. Chiamando adunque A l'altezza dell'astro sopra l'orizzonte, p la parallasse di altezza, e P l'orizzontale, si avrà sen $p =$ sen P cos A. Anzi sostituendo al seno dell'angolo parallatico per la piccolezza l'arco corrispondente, in luogo di sen $p =$ sen P cos A, si potrà dire $p = P \cos A$; o sia *la parallasse di altezza è eguale alla parallasse orizzontale multiplicata pel coseno dell'altezza apparente dell'astro sopra l'orizzonte.*

204. Siccome il triangolo parallatico TrS, o TgS è sempre nel piano perpendicolare al centro della terra ed all'astro; così la differenza tra il luogo apparente dell'astro veduto dalla superficie della terra, e il luogo del medesimo veduto dal centro della terra, che dicesi *luogo vero*, si deve riferire e computare sopra un circolo verticale. In fatti la parallasse ba di r, o dA di g si stima sul circolo verticale $ZBDA$, ec., perpendicolare al centro T e all'astro in r e in g. Per lo che la parallasse può solamente alterare la posizione su giù dell'astro sopra un circolo verticale, e non mai mutarne il luogo fuori di questo cerchio. Ma per definirne con più esattezza l'effetto, è da riflettere che l'angolo aSZ, il quale misura la distanza aZ, o sia del luogo apparente, dal zenit, sempre è più grande dell'angolo bTZ, che misura la distanza bZ, o sia del luogo vero, dal zenit; perciocchè l'angolo aSZ come angolo esterno è eguale ai due angoli STr, TrS. E però il luogo apparente sarà sempre più lontano dal zenit, che non è il luogo vero. *L'effetto dunque della parallasse non consiste in altro, che nell'abbassare gli astri, o sia nell'allontanarli dal zenit.* Però il luogo apparente a è più basso in riguardo al luogo vero b, e il luogo apparente A è più distante da Z, che non è d.

205. È inoltre da avvertire che se l'astro innalzandosi da g in r giunge in P nella linea verticale ZS; allora, sia che fosse veduto da S o da T, cioè dalla superficie o dal centro della terra, sempre si riferisce al medesimo punto Z dei cieli, nè ha luogo la parallasse. Dalla formola $p = P \cos A$ è chiaro che l'altezza dell'astro si-

tuato nel zenit è di 90°, il cui coseno $= o$, d'onde ne risulta $p = o$, o sia una parallasse nulla. *Un astro* adunque *che si trova nel zenit non ha parallasse.*

206. Di più, se l'astro si trova nell'orizzonte, in g la sua parallasse è al *maximum;* perciocchè allora l'altezza è zero, e il coseno di zero $=$ al raggio $= 1$, e la quantità $P \cos A$ divenuta un *maximum* c'indica che la massima parallasse è l'orizzontale. Di fatto dalla formola stabilita nel num. 203 è chiaro che, posto TS il raggio della terra per costante, la parallasse varia nella ragion diretta del seno dell'apparente distanza dell'astro dal zenit. D'onde si ricava che la parallasse è nulla nel zenit, e va crescendo dal zenit all'orizzonte, in cui giunge al *maximum*, perchè ivi il seno della distanza apparente dell'astro dal zenit è ASZ. *La parallasse* adunque *orizzontale è sempre la più grande, e la parallasse va decrescendo come l'astro s'innalza sopra l'orizzonte, e svanisce al zenit, in cui diventa nulla.*

207. Date in fine le medesime altezze di due astri, la parallasse è in ragione inversa della loro distanza dal centro della terra. La parallasse orizzontale DA della luna in G : alla parallasse orizzontale dA del pianeta in g :: Tg : TG; perchè nei due triangoli rettangoli TSG, TSg si ha sen TGS : sen TgS :: Tg : TG. E come le stelle fisse si possono considerare situate ad una distanza pressochè infinita; così il loro luogo apparente non è alterato dalla parallasse diurna. *Le parallassi* adunque *di due astri che hanno la medesima altezza apparente, o del medesimo astro veduto alla stessa altezza apparente, ma a diverse distanze, sono in ragione inversa delle loro distanze dal centro della terra.*

Chiamando adunque p, p' le parallassi, d, d' le distanze degli astri, si avrà $p : p' :: d' : d$. E come il diametro apparente o apparente grandezza di un astro è in ragione inversa delle distanze; così indicando per g, g' i diametri apparenti, ne viene $g : g' :: d' : d$. Di che segue $p : p' :: g : g'$; o sia le parallassi di un astro veduto a diverse distanze sono come i diametri apparenti del medesimo astro. In somma come le parallassi e i diametri apparenti di un astro van decrescendo le une e gli altri nella stessa ragione inversa delle distanze, ognun si accorge che sono proporzionali tra loro. E però *la parallasse di un astro è sempre proporzionale*

al suo diametro. Siccome la parallasse di Venere fu osservata di 30″, e il suo diametro nel tempo stesso era di 60″, ne deriva che la parallasse di Venere sarà sempre metà del suo diametro.

208. È facile ora il comprendere, come conosciuta la parallasse orizzontale di un astro, si possa ricavare la sua distanza dal centro della terra. Imperocchè nel triangolo parallatico *SgT* l'angolo *gST* è retto; la base *ST* è nota, perchè è il raggio della terra, e l'angolo *SgT* è dato, come quello ch'esprime la parallasse orizzontale dell'astro *g*. Dalle proporzioni adunque il seno della parallasse *SgT* : al raggio *ST* della terra :: il seno tutto : alla distanza *Tg* dal centro della terra, si avrà la distanza *Tg*, che sarà espressa, o in leghe o in miglia. E siccome in questo calcolo si suppone nota la parallasse orizzontale; così gli astronomi hanno immaginato più metodi per ritrovarla, come è quello delle più grandi latitudini, delle parallassi di ascensione retta, e delle differenze di declinazione determinate nello stesso tempo da osservatori situati in punti nella superficie della terra molto distanti tra loro, ec.

209. Gli astronomi aveano già stabilito le distanze proporzionali dei pianeti dal sole, o sia aveano fissato i rapporti rispettivi delle loro distanze, ma non aveano calcolato quanto erano da valutarsi sì fatte distanze in una misura determinata; percioccbè le riferivano tutte alla distanza della terra dal sole, come unità, senza conoscere ancora il valore effettivo in miglia, in leghe, ec., di questa unità. Così, p. e., nel tempo che Venere si trova nella massima elongazione in *V* (*fig.* 31), col metodo già accennato nel num. 151, presa per unità la distanza della terra dal sole, ne ricavavano la distanza proporzionale di Venere dal sole. Nascea da ciò, che conosceansi le dimensioni relative e non assolute del nostro sistema planetario; e come i valori delle masse, dei volumi e dei diametri dei pianeti dipendono dalle loro distanze, così incerti erano gli astronomi sopra tutte le misure dei corpi celesti. A torre ogni dubbio ebbero ricorso alla parallasse orizzontale del sole, come quella che ci potea prestare, giusta il num. 208, la vera misura della distanza del sole dalla terra, o dell'unità; ma come questa parallasse è piccolissima, e dubbio risulta il suo valore, così si rivolsero ad altri metodi indiretti.

Uno di questi metodi fu quello di cercare la parallasse orizzontale di Marte, quando si trova in opposizione. Ma sebbene gli astronomi e in particolare Cassini si fossero in ciò molto affaccendati; pure non ne cavarono gran pro, perchè la parallasse di Marte è piccola, e nell'osservarla ci lascia spesso in qualche incertezza. Molte altre vie furono imprese, che tutte vennero come mal sicure abbandonate; e in fine si fermarono sul metodo indicato dall'Halley, o sia furono solleciti di ritrarre la parallasse del sole dal passaggio di Venere sul disco solare.

210. Questo passaggio suppone che la congiunzione di Venere sia nel nodo o vicino al nodo; perchè allora si vedrà una specie di ecclisse annulare, o sia un punto nero del diametro forse di 1′, che passa sul disco del sole. Quando la congiunzione arriva giusto nel nodo, allora Venere descrive col suo moto relativo il diametro del disco solare, e questo passaggio, ch'è centrale, dura 7 ore 52 minuti. Ma quando la congiunzione non è nel nodo, Venere descrive sul disco solare una corda tanto più piccola, quanto più grande è la sua distanza o latitudine, e 'l suo passaggio dura tanto meno, quanto più lontano è dal centro del disco solare. Finalmente quando la distanza tra i due centri di Venere e del sole è eguale alla somma dei loro semidiametri apparenti, allora non vi ha passaggio, ma al più un semplice contatto. Ora la parallasse può avvicinare o allontanare i due centri di Venere e del sole, può cangiare la corda che da Venere pare che si descriva, ed allungare o accorciare la durata del passaggio. Per lo che secondo che varj sono i punti sulla superficie della terra, dai quali si osserva il passaggio, varia viene a risultare la parallasse (n. 201), e questa variando, diversa viene a comparire la corda che percorre Venere, e diverso il tempo in cui la descrive. E come questa durata di tempo è calcolata pel passaggio veduto dal centro della terra; così dalla differenza tra la durata calcolata ed osservata si può benissimo argomentare la differenza tra le due parallassi di Venere e del sole; giacchè dalla differenza tra queste due parallassi è cagionata quella tra le durate. Dall'osservazione adunque si ricava la differenza delle due parallassi, e conosciuta questa differenza si trovano le due parallassi. Poichè essendo noti i rapporti delle distanze di Venere e del sole dalla terra, si conosce il rap-

porto delle loro parallassi, che sono (num. 207) reciproche alle loro distanze; e dato il rapporto e la differenza delle due parallassi del sole e di Venere, si ritrovano all'istante i loro valori e le loro quantità. Anzi per procedere con più sicurezza si cerca di osservare la parallasse relativa, o sia la durata del passaggio nei due emisferi, giacchè la parallasse, se allunga un passaggio nell' emisfero boreale, verrà ad accorciarlo nell'australe, e così dalla differenza o in più o in meno che dovrebbe risultare eguale, si valuta ed estima la parallasse relativa del sole e di Venere, e talvolta pigliandosi la media tra le due differenze, l'una in più e l'altra in meno, si procura un'approssimazione maggiore alla vera (V. Biot, *Astron. fis.* tomo III, l. 4, cap. 13).

211. Si comprende ora perchè gli astronomi si divisero in più punti della terra per osservare il passaggio di Venere sul disco solare nel 1761 e 1769, affinchè avuto riguardo alla declinazione del sole per alcuni osservatori, avesse luogo una durata del passaggio più grande, e per altri più piccola del tempo calcolato. È parimente si comprende, come raccolte e comparate tutte le osservazioni istituite in varj luoghi per mezzo dei calcoli convenienti, si abbia ritratto la parallasse solare tra 8″,5, e 8″,7, e sia da tenersi probabilmente secondo Delambre per 8‴,6 nella media distanza dalla terra, che corrisponde a 23405 raggi terrestri. La Place oggi ha dimostrato che si può ancora trovare la parallasse del sole per mezzo di una ineguaglianza della luna, che dipende ed è legata a quella parallasse, ed ei ne ha ricavato una quantità pressochè eguale all'altra che si ritrasse dal passaggio di Venere. Ora conosciuta la parallasse del sole, si conoscono le parallassi di tutti gli altri pianeti, perchè la parallasse di un pianeta è eguale a quella del sole divisa per la distanza del pianeta, presa per unità la distanza media del sole dalla terra (V. Delambre, *Astr. teor. e prat.* tomo II, cap. 27, pag. 482).

212. Molte e tutte di momento sono le alterazioni che cagiona la parallasse nei luoghi apparenti degli astri, mutandone prima di ogni altra cosa la latitudine, l'ascensione retta, la declinazione e la longitudine. Imperocchè dovendosi abbassare l'astro sopra un circolo, il cui piano verticale passa per l'osservatore e pel centro della terra, viene a cangiare la sua distanza dall'equatore e dall'ec-

clittica, e con essa la longitudine e l'ascensione retta. Indi è che gli astronomi computano la parallasse in declinazione, in longitudine, ec. Solamente è da avvertire che ove il circolo verticale viene ad incontrare normalmente l'ecclittica o l'equatore, allora l'effetto della parallasse può aver luogo in latitudine e in declinazione, e non mai in longitudine o in ascensione retta. Oltre a ciò, è qui da notare che la parallasse allontana gli astri tra loro. Se gli astri posti a qualunque altezza avessero la stessa parallasse, abbassandosi egualmente, conserverebbero tra loro sempre la stessa distanza; ma siccome decresce la parallasse (num. 206) in ragione dell'altezza ed è nulla al zenit; così ne segue che gli astri situati a diverse altezze sopra l'orizzonte sono sottoposti a parallassi ineguali, o sia si abbassano più o meno verso l'orizzonte secondo l'altezza, e compariscono a distanze tra loro molto diverse di quelle che realmente hanno. Si aggiunga pure che gli astri ancorchè fossero situati alla medesima altezza; pure trovandosi a distanze diverse dall'osservatore o della terra per cagione della diversa distanza in virtù del num. 207 sortiscono una parallasse ineguale; cioè a dire più piccola i più distanti, e più grande i più vicini. Per lo che allontanandosi inegualmente dal zenit compariscono distanti tra loro, e non pajono posti come sono alla medesima altezza. Non è da tacersi in terzo luogo, che gli astri abbassandosi per la stessa parallasse, compariscono di tramontare più presto e di spuntare più tardo; di modo che la parallasse influisce sul tempo del nascere e del tramontare degli astri. Finalmente è da ricordare che la parallasse ha molta parte nel calcolo dell'ecclisse solare, come noi abbiamo notato nel num. 175. Imperocchè la luna abbassandosi per la parallasse, e mutando longitudine e declinazione, ec., si potrà collocare fuori del disco solare, e non aver luogo l'ecclisse, o pure si potrà situare giusto nella linea che unisce l'occhio dell'osservatore e 'l centro del sole, e cagionarci così un ecclisse totale. E perchè gli osservatori posti in diversi punti della superficie della terra veggono la luna più o meno alta sopra il loro orizzonte; perciò la parallasse lunare non è per tutti la stessa, e la luna abbassandosi più o meno in riguardo ai diversi osservatori può ecclissare una maggiore o minore quantità del disco solare. Indi il calcolo della parallasse

a tenore dei punti diversi della superficie della terra è un elemento necessario per fissarne non solo l'ecclisse, ma altresì la sua quantità più o meno grande. Ma nel calcolare la parallasse lunare è giusto di avvertire che le formole da noi sopra indicate sono in parte manchevoli, perchè suppongono la terra perfettamente sferica, e perciò il raggio terrestre, che è la base del triangolo parallatico, una quantità costante, il che non si avvera, come innanzi diremo. Questa supposizione della perfetta sfericità della terra non cagiona un errore sensibile, ove si calcola la parallasse dei pianeti che sono lontani; ma produce un errore da tenerne conto e da correggerlo, ove si tratta della parallasse della luna ch'è molto vicina alla terra, perciocchè allora una differenza nella base del triangolo parallatico influisce molto nella quantità dell'angolo parallatico, o sia nella parallasse (Vedi Biot, *Astron. fis.* tomo I, lib. 1, cap. 19, pag. 260).

Sarebbe qui opportuno di parlar della rifrazione che produce un effetto contrario a quello della parallasse, giacchè innalza gli astri, quando questa li abbassa; ma di tale argomento si toccherà ove si spiegheranno i fenomeni della luce.

DELLA FISICA CELESTE

PARTE SECONDA

DEI MOVIMENTI REALI DEI CORPI CELESTI

213. Esponendo e passando in rivista i fenomeni celesti e i movimenti degli astri, come si veggono da noi posti sulla terra, siamo avvertiti che varie e non poche sono le nostre illusioni, e abbiamo fondata ragione di sospettare che i loro moti apparenti sieno molto e ben diversi dai reali, perchè bizzarri ed assai intricati da noi si osservano, e privi di quella semplicità che suol distinguere le opere della natura. La parallasse e la refrazione abbassando ed alzando gli astri, altera e sommuove ai nostri occhi la loro posizione; l'abberrazione ci mostra nelle stelle un moto che di fatti non hanno; le costellazioni fan sembianza di camminare lungo l'ordine dei segni, perchè gli equinozj precedono; Mercurio e Venere ci pare che muovansi con un moto alternativamente diretto e retrogrado in longitudine, e in mille guise diverse ora si avvicinano ed ora si allontanano dall'equatore; tutti i pianeti si fermano periodicamente nel loro cammino, e vanno giù su ora, in senso diretto e ora in senso retrogrado, e le comete errano per noi nei cieli. Tutta la sfera, e con essa tutte le stelle girano e muovonsi con una velocità maravigliosa e oltre ad ogni immaginare in tempo di 24 ore, nell'atto che noi soli sulla terra godiamo una perpetua quiete ed un eterno riposo. Queste apparenze, che possono illudere i nostri sensi, ma non contentare la nostra ragione, e questo riposo della nostra terra, che quanto più è confermato dai nostri occhi, è altrettanto rigettato dal nostro spirito, ci animano a più serie considerazioni, e a lanciarci, dirò così, colla mente fuori della nostra terra per contemplare in sito più opportuno i fenomeni celesti. I fatti da noi esposti nella prima parte saranno il fondamento delle nostre ricerche, e usando innanzi d'ogni altro della comparazione, che è l'unico potente strumento dell'analisi,

ci verrà forse il destro, come paragoneremo tra loro questi moti in apparenza così anomali e bizzarri, di ridurli prima in classe, e poi di cogliere le leggi cui stan sottoposti; onde conosciuta l'origine dei nostri inganni, e distinte le apparenze dalle realtà, formar ci potremo un'idea vera del sistema del mondo, e principalmente del nostro sistema planetario. A quest'oggetto andremo esaminando: qual è il centro dei movimenti dei pianeti primarj e secondarj? Qual è la loro trajettoria? Da quali leggi è costantemente regolato il moto dei pianeti e delle comete? Ed ove sì fatti articoli saranno da noi con diligenza esaminati e maturatamente discussi, ci verrà certamente fatto di determinare l'ordine, l'ampiezza e le dimensioni del nostro sistema, di svolgere e ridurre a semplicità quei moti che appariscono cotanto intricati e misteriosi, di stabilire le leggi cui invariabilmente obbediscono i corpi celesti, di conoscere l'origine delle nostre illusioni, e ammirare la sapienza con che tutto è stato proporzionalmente ordinato e disposto.

CAPO PRIMO

DEL MOTO DEI PIANETI SUPERIORI ED INFERIORI INTORNO AL SOLE.

214. Tenendo attenti e fissi gli occhi alle apparenze dei moti di Mercurio e di Venere, osserviamo che come cresce il loro emisfero illuminato in riguardo a noi, altrettanto decresce il loro diametro apparente; il che dimostra che questi due astri si muovono ed hanno per centro del loro moto il sole, come chiaro si vedrà osservando le fasi e le apparenze di Venere, che gira intorno al sole per *MVGFANBU* nella *fig.* 31. L'andare dunque e venire di Mercurio e di Venere da *D* in *C* e da *C* in *D*, e 'l loro moto retrogrado e stazionario non sono che illusioni e semplici apparenze; giacchè dai fenomeni stessi di questi due pianeti, cioè dalle loro fasi e dai decrementi e accrescimenti dei loro diametri, senz'alcun dubbio si raccoglie che muovonsi in un'orbita che ha per centro di loro moto il sole, e non la terra. Infatti non veggonsi mai in opposizione come i pianeti superiori, perchè le loro orbite non abbracciano e racchiudono la terra.

215. Il moto di Mercurio e di Venere intorno al sole, che fu conosciuto dagli Egizj, venne rigettato da Tolomeo. Credea egli, secondo che piacque ai Caldei, che la terra immobile fosse il centro dei moti dei corpi celesti, e intorno ad essa girassero in ordine la luna, Mercurio, Venere, il sole, Marte, Giove e Saturno. A spiegar quindi i moti apparenti di Mercurio e di Venere gli convenne fabbricare più circoli alla maniera che costumavano gli antichi, cioè a dire: suppose che Venere si muovesse in un circolo nominato l'*epiciclo*, e che il centro dell'epiciclo girasse sulla circonferenza di un secondo cerchio, il quale si chiamava *eccentrico*, perchè non avea nel suo centro la terra; e suppose oltre a ciò che il centro dell'eccentrico si movesse in un piccolo cerchio alquanto distante dalla terra, e con un moto contrario a quello del centro dell'epiciclo. Fornita la costruzione di tutti questi cerchi, andò dichiarando le *digressioni* o *elongazioni* di Mercurio e di Venere per mezzo del moto di questi due pianeti nel loro epiciclo; l'ineguaglianza nelle loro massime elongazioni col moto nell'eccentrico; le apparenze di Mercurio, che compariva due volte perigeo ed apogeo, col favore del terzo circoletto, in cui camminava il centro dell'eccentrico, e così del resto. Ora se in luogo di creare tanti circoli immaginarj si fosse contentato di mettere in movimento Mercurio e Venere intorno al sole, come oggi è fuor d'ogni dubbio, avrebbe più facilmente e più naturalmente spiegato i moti apparenti di questi due pianeti, nè avrebbe prodotto un sistema astronomico tanto lontano dal vero sistema del mondo, e la cui falsità, oltre a tanti altri argomenti, basta a dimostrarsi dal solo moto reale di Mercurio e di Venere intorno al sole.

216. Siccome i pianeti superiori, come Marte, Giove, ec., si vedono nel *maximum* di loro grandezza apparente quando sono in opposizione, e nel *minimum* ove sono in congiunzione; così è chiaro ch'essi trovansi più vicini alla terra nelle opposizioni, e più lontani dalla medesima nelle congiunzioni: dal che si argomenta che la terra non sia il centro dei loro movimenti, molto più che, tenendosi la terra per centro dei loro moti, si dovrebbe supporre alle loro orbite una grandissima eccentricità, la quale non ben si conviene colle osservazioni, ed è tutta gratuita. Siamo al contrario abilitati a credere

che i pianeti superiori muovonsi tutti quasi circolarmente intorno al sole. Imperocchè i moderni astronomi calcolando per mezzo degli ecclissi dei satelliti di Giove la distanza di Giove dal sole in parti della distanza del sole dalla terra, si sono accorti che Giove gira con un moto quasi uniforme, e si muove a distanze dal sole che sono pressochè eguali in ciascuna sua rivoluzione. Se dunque il sole è il centro dei movimenti di Giove, tutti gli altri pianeti superiori, che presentano nei loro moti le medesime circostanze ed apparenze di Giove, sono da tenersi per analogia come corpi che perfezionano le loro rivoluzioni intorno al sole; massime ove si riflette che la terra non può essere il centro dei loro moti senz'aver ricorso ad epicicli e ad eccentrici, e ai circoli immaginarj di Tolomeo. E in verità tutti i pianeti superiori, secondo che a noi apparisce, cangiano prima dell'opposizione il loro moto da diretto in retrogrado, e dopo da retrogrado in diretto, la quale apparenza non dovrebbe aver luogo se girassero intorno alla terra. Risulta al contrario facile e pronta la spiegazione di questi fenomeni, ove si voglia supporre ch'essi muovansi intorno al sole, e che unitamente al sole girino intorno alla terra; perciocchè cospirando alcuna volta e talvolta essendo contrarj i due movimenti, l'uno ch'essi hanno intorno al sole, e l'altro che hanno col sole intorno alla terra, si comprende benissimo ch'essendo cospiranti questi due moti, compariscano di camminare in senso diretto, ed essendo contrarj, ci facciano sembianza di muoversi con un moto retrogrado. È quindi da conchiudersi da tutto ciò, che i pianeti superiori si rivolgono e circolano intorno al sole, da cui ricevono la luce, e che movendosi in orbite che racchiudono la terra, non stan soggetti a fasi, come Venere e Mercurio (eccettuato Marte, che per la sua posizione comparisce alcuna volta gibboso); perciocchè dalla terra situata dentro le loro orbite si vede sempre il loro disco rischiarato dai raggi solari.

217. Non potendosi più sostenere l'ipotesi di Tolomeo, come quella ch'era giornalmente contraddetta dalle osservazioni, Ticone Brahe pose innanzi un altro sistema, con cui, distrutti gli antichi circoli di Tolomeo, gli venisse meglio fatto di spiegare i moti dei corpi celesti. Secondo lui la terra è immobile nel centro della sfera celeste, e intorno alla terra girano la luna e il sole, men-

tre intorno al sole circolano tutti gli altri pianeti e le comete, i quali sono strascinati tutti dal sole; di modo che la terra sia la sola stabile e ferma in tutto l' universo. Ma un sì fatto sistema, sebbene sia acconcio a fare ragione di tutte le apparenze, e si possa considerare sotto questo riguardo come matematicamente vero; pure è contrario (come si vedrà) alle leggi della fisica, o sia è fisicamente assurdo.

218. Essendo fuor d'ogni dubbio che la massa di Marte o di Giove o di Saturno o del sole, ec., sia più grande e assai più pesante di quella della terra, non si può comprendere ed è oltre ad ogni verisimiglianza nel sistema di Ticone, che le masse enormi di tanti pianeti sieno tutte in movimento e circolino tutte intorno alla terra, ch'è così piccola e leggiera in riguardo a loro, e che questa sola costringendole tutte a girarle d'intorno resti immobile e quieta. E cresce vie più la difficoltà, ove si attende che Marte e Giove e Saturno ed Urano, ec., i quali sono tanto lontani e perfezionano in più anni il loro corso, debbono essere animati di una celerità prodigiosa ed oltre ad ogn'immaginare, affinchè essi unitamente al sole, secondo che piace a Ticone, girino nello spazio di un anno intorno alla terra. Ma quel che è più, siccome un corpo gira intorno ad un altro in virtù delle forze centrali (num. 88); così supporre si dovrebbe nella sola e piccola massa della terra una forza prodigiosa da bilanciare quella che risiede nel sole; la quale è tanta e tale che equilibra le masse tutte dei pianeti e delle stesse comete che gli circolano d'intorno; cosa ch'è da stimarsi assurda. E nel caso ancora che si voglia ammettere nella terra una sì fatta energia e maravigliosa forza, non potrà mai avvenire ch'essa rimanga in un riposo assoluto; perciocchè in virtù delle leggi della dinamica (num. 95) quando un corpo gira intorno ad un altro, entrambi sono in moto e circolano intorno al loro comune centro di gravità. Nel sistema adunque di Ticone sono da ammettersi tante inverisimiglianze e tanti assurdi per lasciare la terra in riposo, mentre ad onta di tanti inutili sforzi la terra non può mai restare in una perfetta quiete. Al contrario, mettendo la terra in moto con tutti gli altri pianeti intorno al sole, una piccola massa, qual è quella della terra, gira con Marte, con Giove, ec., intorno alla grande e maestosa massa

solare; e non siamo costretti a supporre nella terra una forza di gran lunga superiore alla sua massa, nè a raddoppiare e complicare i moti dei pianeti facendoli muovere intorno al sole e col sole intorno alla terra, nè finalmente ad imprimere loro una velocità che vince ogni nostro immaginare, per obbligarli a girare in un anno intorno a noi. Per altro se la terra è corteggiata da un sol satellite, e più lune girano intorno a Giove, a Saturno e ad Urano; se la terra è un corpo opaco come gli altri pianeti; se essa ha una massa più piccola degli altri, perchè dovrà tenersi in riposo, e non girare, come gli altri pianeti, intorno al sole? L'analogia adunque, l'ordine e la semplicità del sistema e le leggi della meccanica ci portano a conchiudere che la terra non è immobile, e ch'essa cammina e fa la sua rivoluzione intorno al sole. Indi è che Copernico tenne il sole come il centro di movimento di tutti i pianeti, e annunziò che Mercurio, Venere, la Terra, Marte, ec., circolano e rivolgonsi intorno al sole.

219. Nè la testimonianza dei sensi, che altamente ci assicurano la quiete della terra, può contrastare e rovesciare le prove ricavate dall'analogia e dalle leggi della fisica. Si è già da noi dimostrato nel T. I, num. 35, che non si può giudicare nè argomentare il moto assoluto di un sistema, di cui si fa parte, dalle apparenze che si osservano; perchè i moti relativi han luogo come se tutto il sistema si riposasse in quiete. Tutti i corpi sulla terra muovonsi come se essa non si movesse, e non potendoci accorgere dai loro moti che la terra cammina, crediamo che il sole, intorno a cui ci rivolgiamo colla terra, si muova in luogo nostro, e trasportiamo così per un'illusione dei nostri sensi il moto della terra al sole; non altrimenti che stando sopra una nave che cammina, ci pare che le ripe, le case e i monti ci fuggano e camminino nel tempo stesso che la nave e noi colla nave ci muoviamo e camminiamo. Se in luogo di stare sulla nave fossimo noi situati sulla luna o sopra Giove o altro pianeta che certamente si muove, saremmo noi sottoposti allo stesso errore dei sensi; perciocchè la luna o Giove ci parrebbe immobile nel centro dell'universo; e trasportando il moto della luna o di Giove al sole, alla terra e a tutti gli altri pianeti, crederemmo che questi unitamente al sole girassero intorno al luogo

della nostra abitazione. Tanto egli è vero che le apparenze c'ingannano, e che i nostri sensi non vagliono a distruggere il moto della terra! Siamo al contrario avvertiti dai sensi stessi del fenomeno dell'aberrazione delle stelle fisse, che diritto ci conduce a conchiudere il moto della terra.

220. Il fenomeno dell'aberrazione già da noi annunziato nel num. 192 è apparente, e tutto risulta dal moto e dalla velocità della luce combinato col moto e velocità della terra; e però suppone e dimostra il movimento della terra intorno al sole. Poichè se l'osservatore collocato sulla terra in quiete ricevesse il raggio che si parte da una stella, qualunque sia il tempo che impiega la luce a venire dalla stella all'occhio dell'osservatore, questi vedrebbe la stella nel luogo in cui essa veramente si sta. Ma se nel tempo che l'occhio dell'osservatore è percosso dalla luce sia trasportato colla terra, allora l'occhio percuoterà la luce colla sua direzione e velocità. Due adunque sono le impressioni che riceve l'occhio dell'osservatore che si muove colla terra: l'una è quella che fa la luce, e l'altra è quella dell'occhio sulla luce, che comparisce venire del pari dalla luce; perciocchè l'impressione riesce la stessa, sia che i corpi urtano noi, o noi camminando urtiamo i corpi. E come queste due impressioni, l'una nella direzione del raggio e l'altra in quella del moto della terra, formano un angolo tra loro; così ne viene d'ambidue un'impressione risultante giusta la direzione della diagonale; e l'occhio in luogo di vedere la stella nella direzione del raggio, la vede per una direzione intermedia alle due direzioni della luce e della terra, o sia per la diagonale che gli mostra la stella là dove veramente non è; e l'angolo che misura la differenza tra il luogo reale e l'apparente, dicesi *angolo di aberrazione.*

Ora le circostanze tutte di tal fenomeno corrispondono sì fattamente a questa spiegazione, e così particolarmente la determinano, che escludono interamente, nè danno luogo a qualunque altra supposizione che si possa fare in contrario. E primieramente la direzione della diagonale o sia l'angolo di aberrazione dipende, come ciascun sa, dalla quantità delle due velocità della luce e della terra. Di fatto i nostri movimenti sulla terra, come quelli che sono infinitamente piccoli rispetto al moto e alla ve-

locità della luce, non danno aberrazione; perchè l'angolo di aberrazione risulta infinitamente piccolo, e la diagonale quasi coincide colla direzione della luce. Non così avviene col moto della terra, che ha una velocità riguardo a quella della luce come 1 a 10313. Il calcolo dimostra che, posto sì fatto rapporto tra le due velocità, l'angolo d'inclinazione della diagonale o sia dell'aberrazione deve essere, come di fatto è, 20",25. Il moto adunque della terra combinato con quello della luce non solo spiega in generale il fenomeno dell'aberrazione, ma ne determina con precisione ed esattezza la quantità, il che è una prova della verità del principio da noi supposto per ispiegarlo. Il tempo oltre a ciò in cui si descrive dalle stelle la circonferenza di aberrazione è di un anno, o sia esattamente uguale a quello che impiega la terra a percorrere la sua orbita. Di più, il luogo che occupa la stella nel circoletto di aberrazione, dipende ed è determinato da quello della terra nella sua orbita; perciocchè costantemente il luogo apparente della stella è determinato da una linea retta tangente al punto dell'orbita in cui si trova la terra. Ed al contrario questo luogo non corrisponde mai a quello del sole, che trovasi innanzi o alla distanza di 90°. Finalmente sebbene l'orbita della terra o l'ecclittica non sia perfettamente circolare, pure la differenza tra i due assi essendo piccola e insensibile (num. 128), ne segue che le stelle situate al polo (num. 192) pajano di descrivere un circolo perfetto, e che la quantità di aberrazione, come quella ch'è espressa dal raggio di questo cerchio, sia sempre costante di 20",25. Per le stelle poi che sono interposte al polo e all'ecclittica l'aberrazione ha luogo in un'ellisse, la quale tanto più comparisce compressa, quanto più la posizione delle stelle è obbliqua o sia vicina all'ecclittica. Indi è che la quantità di aberrazione ora cresce ed ora decresce per tali stelle; ma il *minimum* della quantità di aberrazione corrisponde sempre all'estremità del piccolo asse delle ellissi di aberrazione, e il *maximum* all'estremità del grand'asse. In tutte poi il *maximum* di aberrazione è sempre e costantemente di 20",25, quantità risultante dalle due velocità del moto della terra e della luce combinate insieme. Qualunque sia perciò la posizione delle stelle, tutte concordemente ci annunziano colla loro aberrazione la causa da noi recata per ispiegarla.

221. Questa esatta e costante corrispondenza tra tutte le circostanze del fenomeno che ha luogo in tutte le stelle situate in posizione diverse, ci somministra il carattere più certo della verità della causa da noi recata, e da Bradley la prima volta proposta, cioè a dire che l'aberrazione delle stelle non da altro proviene che dal moto successivo della luce combinato col moto della terra. Per lo che l'aberrazione, che è apparente e una illusione dei nostri sensi, diviene una prova sensibile ed un argomento incontrastabile del movimento della terra intorno al sole. E se i sensi ci danno il pregiudizio dell'immobilità della terra, essi stessi con un'altra illusione, coll'apparenza cioè dell'aberrazione ch'è un fenomeno il quale ha luogo fuori della nostra terra, ci attestano e ci assicurano che la terra si muove, perciocchè l'aberrazione suppone e racchiude il movimento della terra, ed ha da questo nascimento. Ma questa prova piglierà più forza dagli altri fenomeni dei corpi celesti, giacchè ciascun fenomeno è una dimostrazione del moto del nostro pianeta.

CAPO II.

DELLE LEGGI GIUSTA CUI SI REGOLANO I MOTI DEI CORPI CELESTI.

222. Essendosi da noi già stabilito che tutti i pianeti si muovono intorno al sole, come centro di loro moto, e la terra eziandio; la prima ricerca da farsi è la legge a norma di cui essi muovonsi, o sia calcolando i loro varj moti, raccogliere in mezzo alla loro multiplicità la regola cui si uniformano costantemente nei loro periodi. Questa ricerca, che sarebbe lunga e penosa, è stata già perfezionata da Keplero, il quale col favore delle osservazioni di Ticone e per forza del suo ingegno seppe discoprire e pose invariabilmente le tre leggi secondo cui si governano i moti dei pianeti, di modo che a noi altro non resta che indicarle.

223. Keplero fu il primo che, seguendo il cammino dei pianeti nelle loro orbite, intese a calcolare le distanze in cui si trovano nei varj punti della loro trajettoria; ed egli fu parimente il primo che riferì sì fatte distanze al luogo vero in cui è il sole, riguardandolo

come centro di moto dei pianeti che gli girano intorno. Nè tutta la pena che egli si diè, e la noja di tanti minuti calcoli che egli sostenne per determinare le distanze di Marte in particolare, così nelle opposizioni come nelle quadrature, furono vane. Poichè collocando il pianeta Marte all'estremità delle già ritrovate distanze, si accorse che i luoghi in cui era Marte, camminando per la sua orbita, non corrispondeano nè si poteano bene adattare ad un'orbita circolare che avea il sole per centro, perchè non erano eguali, come doveano essere nel caso che descrivesse un cerchio. Osservando adunque che i raggi vettori, i quali rappresentano le distanze, ora cresceano ed ora decresceano, gli corse alla mente che l'orbita di questo pianeta fosse ellittica. Cominciò quindi a riferire i luoghi e le varie distanze di Marte ad una ellisse, e vide chiaro che il pianeta tracciava questa curva; si accorse dell' afelio e del suo perielio; stabilì la linea degli apsidi; conobbe che il sole occupava il fuoco dell'orbita ellittica di Marte, e ne misurò la eccentricità; abolì in somma la via circolare, che la vecchia astronomia avea assegnato all'orbita dei pianeti.

224. Riguardando come da noi si fa il sole per immobile, e tenendolo per centro dei moti planetarj, ciascun si accorge che i movimenti da noi attribuiti al sole sono da riferirsi alla terra che gli gira intorno. E come da noi si è dimostrato che il cammino del sole è ellittico (num. 123), e pare di aver la terra nel fuoco della sua orbita ellittica; così sostituendo le realtà alle apparenze, è da collocarsi il sole nel fuoco dell'orbita ellittica della terra, e trasportando alla terra l'eccentricità da noi osservata nel sole, è da conchiudere che la terra nello stesso modo di Marte gira e cammina in una ellisse.

Nè la figura dell'orbita degli altri pianeti è diversa di quella di Marte e della terra, giacchè per le osservazioni di tutti gli astronomi è oggi fuor di ogni dubbio che tutti muovonsi in un'ellisse. Sono già stabiliti i metodi con cui si calcolano le loro orbite, e corrono per le mani di tutti le tavole in cui si trovano notate l'eccentricità delle loro orbite, e le loro distanze medie dal sole, che corrispondono e sono eguali alla metà del grand' asse delle trajettorie ch'essi descrivono. Valutando in fatti la distanza media dalla terra al sole come 1, si computa

per l'anno 1801 la distanza media

di Mercurio	0,387098
di Venere .	0,723332
della Terra	1,000000
di Marte . .	1,523694
di Giove . .	5,202791
di Saturno .	9,538770
di Urano . .	19,183305

Volendo poi aggiungere a queste distanze medie quelle dei quattro pianeti telescopici, si ha

per Cerere .	2,767406
per Pallade .	2,767592
per Vesta . .	2,567163
per Giunone	2,373000

225. Se poi vogliamo soggiungere ai semiassi maggiori o distanze medie dei pianeti il rapporto dell'eccentricità al semiasse maggiore, si ha pel 1801

Mercurio	0.205514
Venere .	0,006853
Terra . .	0,016853
Marte . .	0,093134
Giove . .	0,048178
Saturno .	0,056168
Urano .	0,046570

Per gli asteroidi poi si ha

Cerere . .	0,078349
Pallade .	0,245384
Vesta . .	0,254944
Giunone	0,093220

226. Egli è da osservare dopo ciò, in primo luogo, che la distanza dei quattro piccoli pianeti dal sole sia quasi la stessa, e in particolare quella di Cerere e Pallade, e che Cerere e Giunone, le quali più differiscono pel grand'asse, abbiano per poco la medesima eccentricità. Ma soprattutto è da ritrarre da sì fatte determina-

zioni, che ricavate sono dalle osservazioni sull'orbita di tutti i pianeti, come certa e indubitata la legge scoperta da Keplero, cioè a dire che i pianeti non si muovono in un'orbita circolare, ma che *le loro trajettorie sono tutte dell'ellissi, in cui il centro del sole è collocato in uno dei fuochi.*

227. Keplero, osservando che i pianeti, e in particolare Marte e la terra si moveano nelle loro orbite con velocità ineguali, e che la loro velocità si rallentava, come andava crescendo la loro distanza dal fuoco o sia dal centro del sole, e al contrario si accrescea come più si avvicinavano al sole nel corso della loro trajettoria; si pensò che la somma di tutte le distanze in cui si ritrovava un pianeta nell'intervallo di un dato tempo, dovea essere eguale alla somma delle velocità corrispondenti a sì fatte distanze. Ma come la velocità si misura o dagli archi (num. 103), o dagli angoli (num. 105); così per comparare la somma delle distanze a quella delle velocità erano da rapportarsi le distanze agli archi o agli angoli; la qual cosa gli parea e lunga e difficile a praticarsi. Indi fu che sostituì agli archi le aree: e come sapea di certo che in un cerchio le aree sono proporzionali ai tempi, perchè tutte sono eguali e descrivonsi in tempi eguali; così sospettò che le aree dei settori calcolati dal fuoco delle loro orbite o sia dal centro del sole fossero proporzionali ai tempi (num. 101). Al sospetto quindi aggiunse la prova; perciocchè multiplicando il moto giornaliero di Marte o della terra in riguardo al sole pel quadrato del loro rispettivo raggio vettore, si accorse che ne risultava sempre e costantemente lo stesso prodotto. Ora questo prodotto è eguale al doppio del piccolo settore, che il raggio vettore di Marte o della terra descrive intorno al sole; e però in ciascun giorno o sia in tempi eguali i piccoli settori sono eguali. Questa verità, ricavata da Keplero dai moti di Marte e della terra, fu poi da lui estesa a tutti gli altri pianeti, per cui stabilì come legge fondamentale e generale del movimento di tutti i pianeti, che l'*aree descritte intorno al sole dai raggi vettori dei pianeti sono proporzionali ai tempi da essi impiegati a descriverle.* E questa legge, la prima volta annunciata da Keplero, è stata in seguito confermata e rassodata dalle osservazioni di tutti gli astronomi.

228. Se noi ci mettiamo a considerare il tempo che impiegano i pianeti per perfezionare le loro rivoluzioni intorno al sole cominciando da Mercurio, che è il più vicino, sino ad Urano ch'è il più lontano dal sole, si osserva che nei pianeti, come cresce la loro distanza media, cresce ancora la durata del tempo della loro rivoluzione.

Mercurio impiega giorni	87,969258
Venere . . . . »	224,760824
La Terra . . . . »	365,256384
Marte. . . . . »	686,979619
Giove. . . . . »	4332,596308
Saturno . . . . »	10758,969840
Urano . . . . »	30688,712687.

Cerere poi impiega giorni	1681,539
Pallade. . . . . »	1681,709
Vesta . . . . »	1590,998
Giunone . . . . »	1335,205.

Ora Keplero, osservando che i pianeti impiegano un tempo più lungo a descrivere la loro trajettoria intorno al sole a misura che più ne sono lontani, comprese che dovea trovarsi un rapporto tra le loro distanze medie e la durata delle loro rivoluzioni sideree. Indi si mise a ricercarlo, e dopo un ostinato travaglio di 17 anni finalmente lo rinvenne. Imperocchè comparando i tempi delle rivoluzioni dei pianeti superiori colle loro distanze medie, dopo aver tentato in più e più modi di legarli, si accorse che i quadrati dei tempi periodici sono come i cubi delle distanze medie. Così pigliando il rapporto tra i quadrati dei tempi periodici già notati di Mercurio e di Giove si trova 2425,7, e pigliando il rapporto dei cubi delle loro distanze medie (num. 224) si rinviene 2427,9, ch' è quello dei quadrati presso a poco eguale, o almeno colla differenza minore di un millesimo. Questa legge si è trovata esatta in tutti i pianeti per le osservazioni di tutti gli astronomi, e si tiene come terza legge fondamentale, che *i quadrati dei tempi delle rivoluzioni dei pianeti sono tra loro come i cubi dei grandi assi delle loro orbite.*

229. Da queste tre leggi fondamentali del moto dei pianeti si ricava che il sole occupa uno dei fuochi delle

orbite dei pianeti; che il centro del sole, e non già quello della terra, sia il centro dei loro movimenti; e che la terra al par degli altri pianeti si volge intorno al sole. Poichè essa come gli altri pianeti obbedisce alle stesse leggi, gira in una ellisse, descrive aree proporzionali ai tempi, e il quadrato del suo tempo periodico rapportato al quadrato del tempo periodico di qualunque altro pianeta è come il cubo del suo grand'asse al cubo del grand'asse di qualunque altro pianeta. Le tre leggi adunque di Keplero comprendono e racchiudono il moto della terra, e l'incatenano a tutto il sistema planetario.

230. Se i movimenti dei satelliti si rapportano ai loro pianeti principali come centro, e quelli delle comete al sole, come abbiamo fatto nella considerazione dei moti dei pianeti, si vedrà che le une e gli altri obbediscono alle stesse leggi a cui stan sottoposti i pianeti, e saremo in istato di conchiudere che i moti di tutto il nostro sistema, che risulta dai pianeti, dalle lune e dalle comete, sono rappresentati da tre leggi generali e semplicissime. Lasciando stare la luna che aree descrive proporzionali ai tempi, e si muove in un'orbita ellittica, si è giunto ad osservare una piccola eccentricità nell'orbita del terzo satellite di Giove, e con più evidenza quella del quarto, la quale è molto sensibile. E come i quattro satelliti unitamente a Giove formano un sistema; così essendo certi che l'orbita di due lune sia ellittica, possiamo ritrarre per analogia che anche sia ellittica l'orbita delle altre due. In fatti avendosi calcolato le tavole dei movimenti di questi satelliti, nella supposizione che girano in ellissi, e aree descrivono proporzionali ai tempi, si son trovate di accordo colle osservazioni; e gli astronomi, preso il diametro dell'equatore di Giove, quando si trova alla media distanza dal sole, come unità, assegnano per distanza media

al primo satellite	5,81296
al secondo. . . »	9,24868
al terzo . . . . . »	14,75240
al quarto . . . »	25,94686.

Per distinguere poi i punti degli apsidi delle orbite ellittiche dei satelliti l'han denominato *perjovio* e *apojovio*, come quelli dei pianeti diconsi *perielio* ed *afelio* in riguardo al sole che è il centro dei loro moti.

231. Tra i satelliti di Saturno si è potuta osservare solamente l'ellitticità dell'orbita del sesto, e per analogia se ne è conchiusa quella delle orbite di tutti gli altri. Così si è stabilita la distanza media

pel primo satellite di Saturno	3,080
pel secondo . . . . »	3,952
pel terzo . . . . »	4,893
pel quarto . . . . »	6,268
pel quinto . . . . »	8,754
pel sesto . . . . »	20,295
pel settimo . . . . »	59,154.

pigliando per unità il semidiametro di Saturno veduto alla media distanza dal sole.

232. Herschell, dopo aver discoperto il pianeta Urano, trovò nel 1787 sei satelliti che gli girano intorno. Per misurar poi le distanze rispettive che essi hanno dal pianeta principale ritrasse la distanza di un satellite dall'osservazione, e quindi per mezzo della legge terza (n. 228) andò ricavando la distanza degli altri cinque. E come si accorse che i risultati del calcolo in riguardo al secondo e quarto satellite ben si convenivano colle osservazioni; così ne conchiuse che anche le lune di Urano stan sottoposte alle leggi generali dei moti dei pianeti, molto più che nel tentare di scoprire la distanza del secondo satellite vide che ne veniva un'orbita ellittica. Pigliandosi adunque per unità il semidiametro di Urano veduto alla media distanza dal sole, si è stabilita la distanza media

del primo dei suoi satelliti dal suo centro	13,120
del secondo . . . . »	17,022
del terzo . . . . »	19,845
del quarto . . . . »	22,752
del quinto . . . . »	45,507
del sesto . . . . »	91,008.

233. Dagli ecclissi dei satelliti han ricavato gli astronomi prima la loro rivoluzione sinodica, e poi la siderea.

Questa è pel primo satellite di Giove giorni	1,7691378
pel secondo . . . . »	3,5511810
pel terzo . . . . »	7,1545528
pel quarto . . . . »	16,6887697.

Ora comparando queste rivoluzioni colle rispettive distanze (num. 231), si trova osservata la terza legge di Keplero. Così pel primo e quarto satellite il rapporto dei cubi delle loro distanze medie risulta come 1 a 87,528384 eguale presso a poco a quello dei quadrati dei loro tempi periodici; ch'è come 1 a 87,7969. I tempi periodici delle lune di Saturno sono stati determinati

pel primo	giorni	0,94271
pel secondo . .	»	1,37024
pel terzo. . . .	»	1,88780
pel quarto. . .	»	2,73948
pel quinto . . .	»	4,51749
pel sesto	»	15,94530
pel settimo . .	»	79,32960.

E comparando queste rivoluzioni colle rispettive distanze medie, si trova che ha luogo del pari la terza legge di Keplero. Finalmente questa legge ha servito agli astronomi per calcolare le rivoluzioni dei satelliti di Urano, le quali sono

pel primo satellite	giorni	5,892
pel secondo	»	8,7068
pel terzo	»	10,9611
pel quarto.	»	13,4559
pel quinto.	»	38,0750
pel sesto	»	107,6944.

E sebbene queste rivoluzioni fossero state calcolate nell'ipotesi di quella legge, pure l'osservazione non ha sinora smentito la durata stabilita, anzi pel secondo e'l quarto satellite l'ha del tutto confermata.

234. Volgendo lo sguardo alle rivoluzioni sideree dei tre primi satelliti di Giove, si osserva che il medio moto sidereo del primo aggiunto a due volte quello del terzo ci somministra una somma ch'è e sarà sempre eguale a tre volte il moto medio del secondo. Si è inoltre ritrovato che lo stesso rapporto passa tra i loro moti sinodici; perchè ciascun moto sinodico è eguale al sidereo corrispondente diminuito del moto di Giove. Così chiamando n', n'', n''' i moti siderei in un dato tempo, e s il moto di Giove, si avrà $n' + 2n''' - 3n'' = o$; e però

$n' - s + 2(n''' - s) - 3(n'' - s) = 0$, cioè a dire $n' + 2n''' = 3n''$: tanto egli è vero che tutti i loro moti sono legati tra loro da leggi certe e comuni!

235. Non ci resta, dopo ciò, che a notare un' esatta corrispondenza tra i moti dei satelliti intorno al loro pianeta principale, e quelli dei pianeti intorno al sole. Poichè i satelliti girano intorno ai loro pianeti principali di occidente in oriente seguendo le tre leggi di Keplero, come fanno i pianeti, le loro orbite sono inclinate sopra l'orbita dei loro pianeti, e dalla variazione della loro luce si è ritratto che presentano girando sempre la stessa faccia al pianeta principale; o sia, pel num. 179, che rotano intorno al proprio asse nello stesso tempo in cui compiono la loro orbita. I satelliti in somma fanno un sistema particolare intorno al loro pianeta, come i pianeti formano un unico sistema intorno al sole.

236. Le comete formano l'ultima parte del nostro sistema, e i loro movimenti stan sottoposti alle stesse leggi dei pianeti e dei satelliti. Dopo che Hevelio si accorse che esse moveansi in una parabola, e Doerfeld ripose il sole nel fuoco della loro orbita parabolica, sopraggiunse Newton, che ebbe e definì il cammino delle comete in ellissi assai allungate, di cui il sole occupa uno dei fuochi. Siccome le orbite delle comete si considerano per molto allungate; così il loro grand'asse si ha da noi quasi per infinito, e la loro orbita da ellittica passa e si confonde (num. 110) con quella di parabola.

237. Con questo intendimento venne Newton il primo ad insegnare come date tre osservazioni si possa determinare la trajettoria che descrivono le comete in quella parte che da noi si vede, e molti altri metodi hanno poi inventato gli astronomi e i fisico-matematici per istabilire gli elementi del moto parabolico, che riduconsi alla posizione dei nodi e del perielio della cometa, alla distanza perielia, all'istante del suo passaggio del perielio, e all'inclinazione della sua orbita all'ecclittica (Vedi Biot, *Astron. fis.* tomo III, lib. 1, cap. 8, pag. 104). Or non senza maraviglia si è trovato che gli elementi delle comete, i quali risultano dal calcolo, corrispondono colle osservazioni in modo che le comete hanno, dirò così, scorso le orbite tracciate dall'astronomo e dal matematico. Newton in fatti applicò il suo metodo alla cometa del 1680, e dopo averne determinato l'orbita

calcolò giorno per giorno i luoghi ch' essa dovea occupare nel cielo, ed ebbe il piacere di osservare che i suoi calcoli convenivano con precisione con le osservazioni di Flamstedio, non ostante che il corso della cometa del 1680 fosse stato di una straordinaria irregolarità. Anzi Halley, che volle stabilire l'orbita di questa cometa nel caso di un'orbita ellittica per avvicinarsi vie più all'esattezza, trovò una tale puntuale corrispondenza tra i suoi calcoli e le osservazioni di Flamstedio, che la massima differenza, sia in longitudine, sia in latitudine, non giungea a 2′ 1/2. Applicò parimente lo stesso Newton i suoi calcoli alla cometa del 1664, 1665 e 1682, e sempre i suoi calcoli furono confermati dalle osservazioni di Flamstedio. Più di 80 comete sono state calcolate nella supposizione di una curva parabolica, e tutte si trovano d'accordo colle osservazioni (Vedi le tavole della *Cometografia* di Pingré, e quelle di Olbers). Per lo che oggi è comune sentimento che le comete muovonsi in ellissi molto allungate, per cui dispariscono, nè si possono da noi vedere nel loro afelio, e ci sono visibili solamente quando avvicinansi al sole; che il sole occupando il fuoco comune delle loro ellissi sia il centro del loro moto; e che la curvatura ellittica nel loro perielio molto si avvicina e quasi si confonde colla parabola.

238. Conosciuta l'orbita delle comete, si è di leggieri trovato che le aree descritte da ciascuna cometa nella sua parabola sono proporzionali ai tempi. Poichè si è immaginato un pianeta che si muove in un'orbita circolare, il cui raggio sia eguale alla distanza perielia di una cometa, e si è dimostrato che in tal caso le aree descritte dal pianeta e dalla cometa nel medesimo tempo sono tra loro come 1 alla $\sqrt{2}$, come di fatto debbono essere, nel caso che la cometa aree descrivesse proporzionali ai tempi. Si è oltre a ciò dimostrato che le aree descritte da più pianeti in tempi eguali sono proporzionali alle radici quadrate delle loro distanze perielie; o in altri termini, che i quadrati dei tempi periodici in quella parte della loro orbita che è vicina al perielio sono tra loro come i cubi delle rispettive distanze perielie. Per lo che non si può togliere che le comete si muovono obbedendo al par dei pianeti alle leggi del Keplero.

239. Si può vie più rassodare la teorica delle comete

dal loro ritorno. Halley, dirizzando le tavole di 24 comete già osservate, si accorse che quelle del 1531, del 1607 e del 1682 aveano quasi gli stessi elementi e lo stesso periodo di riapparizione. Imperocchè tutte tre aveano avuto il loro nodo ascendente verso il 20° di toro, il loro perielio verso il 1° di aquario, l'inclinazione all'ecclittica di 17° in 18°, e il loro periodo di 75 o 76 anni. E sebbene la distanza perielia nell'anno 1631 fosse stata 0,56700 in rapporto alla distanza media della terra dal sole considerata come unità, e nell'anno 1607 fosse stata 0,58618, e poi nell'anno 1682 0,58328; pure questa differenza era poco da valutarsi, perchè l'orbita era stata calcolata sulle osservazioni di Appiano, che non si reputano per molto esatte. Aggiungcasi a tutto ciò, che risalendo più innanzi del 1531, trovavansi notate appo gli storici di 75 in 76 anni apparizioni di comete; la quale cosa dava luogo a sospettare che la stessa cometa fosse periodicamente ritornata. Fondato adunque sopra questi dati annunziò Halley che la cometa del 1531 era comparsa nel 1607, e poi ricomparsa nel 1682, e che questa stessa sarebbe ritornata nel 1758 o 1759. L'evento, più che ogni altro ragionamento, giustificò il vaticinio; giacchè la cometa fu osservata la prima volta in Germania a' 25 dicembre del 1758, e poi dal Messier e dagli altri astronomi. Clairaut di più, tracciando la via che dovea la cometa imprendere nel suo ritorno, si accorse che Giove e Saturno doveano ritardarne il ritorno al perielio, ed annunziò che pel ritardo cagionato da quei due pianeti dovea passare la cometa pel perielio nel mese di aprile del 1759, come di fatto passò. Per lo che non si potè più richiamare in dubbio che i moti e i ritorni delle comete sono regolati come quelli dei pianeti. Di fatto essendoci noti gli elementi dell'orbita di questa cometa, si è ricavato che essa si allontana nel suo afelio 35 volte di più che la terra, e nel suo perielio gli si avvicina due volte di più percorrendo un'ellisse molto allungata.

A' 27 febbrajo del 1826 Biela scoprì una cometa, che fu poi veduta da Gambart, Harding e Clausen e da altri, e ben presto si conobbe che gli elementi di questa cometa erano pressochè eguali a quelli della cometa del 1772 e del 1806. Si sono quindi instituiti i calcoli, e si è conchiuso che questa cometa è periodica, il suo periodo

è di anni 6,7, e che si attende in agosto del 1832 (*a*). A parte di questa, si è scoverta un'altra cometa di più corto periodo, che è di anni 3,3. Essa è sfuggita agli sguardi degli astronomi nel 1808, 1812 e 1815 per la sua picciolezza, e si è veduta nel dicembre del 1818, tempo in cui Enke ne potè stabilire il periodo ch'è stato confermato dal ritorno della cometa nel 1825 e nel 1828. Si attende in fine la cometa del 1680, il cui periodo fu calcolato dal Newton di 575 anni.

240. Ciò non pertanto si possono indicare delle comete di cui si è predetto il ritorno, e più non sono comparse. Quella del 1770 fu calcolata prima da Lexell e poi da Burkardt, ed ambidue furono d'accordo nell'assegnarle un'ellisse in cui la durata della rivoluzione era cinque anni e mezzo; ciò non ostante una tale cometa non si è più veduta. Ma tutto ciò nulla prova contro i principj che già abbiamo stabilito intorno ai loro movimenti. Poichè le comete possono esser turbate dai pianeti e dagli altri corpi celesti in tal modo, che il loro moto e la loro orbita potrà venire notabilmente alterata. Per cagione di tante perturbazioni cui sono sottoposte, il loro moto in un'ellisse potrà cangiarsi in una parabola od in un'iperbole, e movendosi in tali curve che non sono chiuse, si potranno allontanare in tal modo dal sole che più non vi ritornino, o pure potranno entrare nella sfera di qualche altra stella per divenire satellite di qualche altro sistema. Sicchè il ritorno di quelle che sono state predette rassoda le leggi de' loro moti, senza che quelle le quali più non sono apparse, le potessero distruggere.

(*a*) La cometa di Biela, di cui parla l'autore, ricomparve effettivamente al suo perielio nell'anno 1832. Secondo l'effemeride che ne pubblicò il professore Santini negli *Annali delle Scienze*, ec. di *Fusinieri*, si attendeva verso i primi di ottobre, e si nutriva speranza di poterla vedere anche in settembre dello stesso anno. A norma della relazione data dal detto Professore, questa cometa fu osservata generalmente fra il giorno 20 ed il 25 ottobre. In Milano fu veduta nel giorno 26 e in Padova il giorno 31 dello stesso mese. Il solo Herschel in Inghilterra, munito di eccellenti telescopj a riflessione, potè osservarla circa un mese prima, cioè nella notte del giorno 23 al 24 settembre 1832. Allorquando incominciò a vedersi generalmente con cannocchiali aromatici di poco più di un metro, era nella sua massima vicinanza alla terra e distante dal suo perielio di 32 in 33 giorni.

241. Le comete sono fornite di poca massa, e si reputano dei vapori condensati. E come le loro code cominciano a vedersi quando sono vicine al sole, e crescon di più dopo il loro passaggio al perielio; così è da credere che provengano dalla loro evaporazione, che ha luogo per la vicinanza del sole che le riscalda. Indi è comune opinione che le comete sieno dei corpi solidi, che riscaldandosi coll'avvicinarsi al sole si possono o in tutto o in parte ridurre in vapori.

CAPO III.

DELLA ROTAZIONE DELLA TERRA, E DELLA SPIEGAZIONE DEI FENOMENI CELESTI PER VIA DEI MOTI REALI.

242. Sebbene il sole sia il centro di moto di tutti i corpi del sistema planetario; pure egli è fornito di un movimento di rotazione intorno al proprio asse. Venere, Marte, Giove, Saturno e 'l suo anello, i satelliti di Giove e di Saturno oltre al moto di traslazione rotano essi nel loro cammino intorno ai proprj assi. La luna, che è un satellite della terra, è fuor di ogni dubbio ch'essa girando intorno al centro della terra, come centro di moto, si rivolga intorno al suo asse. Se dunque tutti i corpi del nostro sistema sono dotati del moto di rotazione, sarà la terra sola la quale è più piccola di Marte, di Giove, di Saturno, del sole, e che cammina intorno al sole come tutti gli altri pianeti, sarà essa sola sfornita del moto di rotazione? Ma sebbene l'analogia ci porti a conchiudere che la terra a parte del suo movimento di traslazione, abbia l'altro di rotazione; pure questo moto si può a varj segni riconoscere e stabilire.

243. I viaggi e le fatiche di tanti astronomi per misurare i gradi dei meridiani terrestri in più punti della terra, ed altri che sonosi or ora mandati ad effetto, ci hanno in prima dato a conoscere che tutti i gradi del meridiano terrestre sono ineguali, o sia che la terra non sia perfettamente sferica. Ci hanno inoltre attestato che i gradi del meridiano terrestre vanno successivamente aggrandendosi dall'equatore ai poli, sebbene la loro variazione e il loro successivo aumento non si trovi sottoposto ad una legge certa e costante. Ora questo au-

mento successivo dei gradi del meridiano terrestre dall' equatore ai poli dimostra che la terra sia schiacciata ai poli e rialzata e quasi gonfiata all'equatore, o sia che l'asse della terra all'equatore sia più lungo di quello dei poli. E a comprender ciò, è da sapersi che il valore di un grado del meridiano terrestre è eguale alla lunghezza dell'arco terrestre compreso tra due verticali, che prolungate nell'interno della terra vanno a formare l'angolo di un grado. Se la terra fosse sferica, tutte le verticali si andrebbero ad unire nel suo centro, e tutti gli archi corrispondenti a ciascun grado sarebbero eguali; ma non così avviene se la terra non è sferica. Là dove maggiore è la convessità, minore è la lunghezza dell'arco; ed all'inverso maggiore è questa lunghezza dove la terra è più piana. Nella curva *AA' BB'* (*fig.* 47) l'angolo *C* formato dalle perpendicolari *AC*, *A' C* è eguale all'angolo *C'* formato dalle perpendicolari *BC'*, *B' C'*; ma come la curva è più convessa in *E* e più piatta in *P*, così l'arco *BB'* è più grande dell'arco *AA'*. Per lo che crescendo la lunghezza dei gradi dall'equatore ai poli, si ha un argomento certo che l'arco tutto del meridiano interposto tra l'equatore e i poli risulta da archetti appartenenti a cerchi diversi, la cui convessità va decrescendo dall'equatore ai poli; o sia che la terra sia più convessa al suo equatore e meno ai poli, o sia schiacciata ai poli.

Ora la figura della terra elevata all'equatore e compressa ai poli è un indizio della sua rotazione intorno al proprio asse. Imperciocchè si è dimostrato nel num. 99 che la terra rotando acquisterebbe il *maximum* di forza centrifuga all'equatore, e il *minimum* ai poli; o sia le particelle terrestri peserebbero meno all'equatore e più ai poli per cagione della forza centrifuga, che operando in senso contrario della gravità in parte la distrugge. Per tenersi dunque in equilibrio la massa tutta terrestre le particelle terrestri equatoriali si devono nel caso di rotazione contrappesare colle polari; la qual cosa non può aver luogo se non si accrescono le particelle terrestri all'equatore, e non si diminuiscono ai poli. Il canale, dicea Newton, che si parte nel piano dell'equatore dal centro della terra e giunge alla sua superficie, deve esser più lungo dell'altro che va dal centro della terra al polo, affinchè il fluido racchiuso nel canale

equatoriale, che pesa meno, si potesse bilanciare col fluido racchiuso nel canale polare, che pesa più. Per lo che ove la terra rota, l'asse dell'equatore dev'essere più lungo dell'asse dei poli, e la terra perciò deve essere più elevata all'equatore che ai poli. Se dunque la terra, come si prova dalla differenza dei gradi dei meridiani terrestri, è rialzata all'equatore e compressa ai poli, si può da ciò ritrarre un segno della sua rivoluzione intorno al proprio asse. Per altro la massa di Giove, il quale rota intorno al proprio asse, è compressa ai poli ed elevata all'equatore, come quella della terra, e l'anello di Saturno, il quale rota, ha pure i suoi diametri ineguali. Dalla teorica adunque e dalle osservazioni egli è certo che la terra rota, perchè ha la sua figura rialzata all'equatore e schiacciata ai poli.

244. Un altro indizio della rotazione della terra si ricava dalle osservazioni eseguite col pendulo nei diversi punti della sua superficie; perciocchè queste ci attestano che la gravità, nello stesso modo che i gradi dei meridiani terrestri, va crescendo d'energia dall'equatore al polo, siccome abbiamo dimostrato nel num. 69. Questa variazione e questo successivo aumento della gravità non si può bene e più ragionevolmente spiegare che per mezzo della forza centrifuga, la quale va decrescendo dall'equatore ai poli; e come la forza centrifuga suppone e racchiude moto circolare e di rotazione (n. 88), così per mezzo del pendulo si ha un indizio del movimento di rotazione della terra. La gravità dunque e i gradi dei meridiani terrestri, i quali van crescendo dall'equatore ai poli della terra, c'indicano che la terra si rivolge intorno a sè stessa, e rafforzano l'analogia, in virtù della quale abbiamo sospettato che la terra roti come tutti gli altri corpi celesti.

245. La rotazione in fine della terra è accennata dalla deviazione dei corpi che cadono da una grande altezza. Siccome i corpi posti a grandi altezze debbono descrivere una circonferenza più grande, e sono perciò dotati di una celerità maggiore di quella che hanno i punti della superficie della terra nel senso orizzontale di occidente in oriente; così movendo essi corpi da una grande altezza non cadranno verticalmente, ma devieranno per la diagonale avvicinandosi all'est. L'esperienza di fatto ci addita che un corpo cadendo dall'altezza di 200 piedi

si avvicina all'est di 3 in 4 linee. L'analogia dunque, lo schiacciamento dei poli, l'aumento della gravità dall'equatore ai poli, e la deviazione dei corpi che cadono da una grande altezza, ci attestano e rassodano che la terra al par degli altri pianeti è fornita di un moto non solo di traslazione, ma di rotazione intorno al proprio asse, che si fa di occidente in oriente.

246. Conosciuti i moti reali, segue spontanea la spiegazione dei fenomeni e di tutte le apparenze. E primieramente basta il movimento di rotazione della terra per dichiarare il moto diurno della sfera; perchè le apparenze riescono le stesse, sia che un uomo situato nel centro di una pianura giri intorno a sè stesso, o che la periferia della pianura giri intorno ad un uomo posto immobile nel centro. Ed in verità, sia che il sole, gli astri e tutto il cielo sieno portati in 24 ore intorno alla terra di oriente in occidente, o che la terra si rivolga in senso contrario di occidente in oriente in 24 ore, i fenomeni risultano gli stessi, e la terra girando percorre tutti i punti del cielo, come se questi intorno ad essa si movessero. Di modo che il moto diurno della sfera celeste è una pura illusione che nasce da ciò, che noi niente avvertiti del nostro moto di rotazione trasportiamo, come suol farsi, agli astri e al sole e a tutto il cielo il nostro movimento in senso contrario. Questa spiegazione è così semplice e naturale, che basterebbe il fenomeno del moto diurno, se mancasse ogni altra prova, ad avvertirci che non è il cielo che gira, ma la terra. Poichè non si può concepire una causa generale costante che imprimer possa al cielo un moto comune di rotazione intorno all'asse del mondo in 24 ore. Come immaginar si potrebbe che una sì fatta causa operasse nel medesimo tempo sopra tanti astri infiniti di numero, distantissimi tra loro, e forniti di masse così grandi ed enormi? Quale forza non si ricercherebbe nel sole e nelle stelle per contrappesare l'energica e prodigiosa forza centrifuga che avrebbe luogo nel caso del loro moto rapidissimo, che li strascina in un giorno d'oriente in occidente? Ed al contrario se il sole, le stelle, i pianeti e 'l cielo non si muovono intorno all'asse del mondo, l'unica cosa reale sarebbe la rotazione della terra intorno al suo asse in 24 ore. Quale causa più semplice, più naturale e perciò più vera si può dare del moto diur-

no? Per altro quale difficoltà si potrebbe incontrare ad attribuire alla terra un moto di rotazione in un giorno, se Marte rota in 24 ore, e Giove e Saturno girano intorno al proprio asse in meno di 10 ore? Gli abitatori di questi pianeti, nel caso che ve ne sieno, osservano il moto di tutto il cielo intorno all'asse del mondo d'oriente in occidente nell'intervallo di 10 ore, e questo moto è certo apparente, perchè noi, che siamo fuori di loro, vediamo che Giove e Saturno girano intorno ai proprj assi d'occidente in oriente. Nello stesso modo noi sulla terra osserviamo il moto diurno del cielo, e gli abitanti di Marte, di Giove e di Saturno, che ci veggono rotare, l'hanno per apparente. Come dunque per la certezza in cui quelli sono che il nostro moto diurno del cielo sia apparente, argomentano che il moto della sfera, ch'essi veggono in 10 ore, sia un'illusione; così noi certi della rotazione di Giove e di Saturno dobbiamo tenere per apparente il nostro moto diurno, e conchiudere che la nostra terra gira in 24 ore intorno al proprio asse d'occidente in oriente.

247. Il giorno dunque risulta dal moto di rotazione della terra, da cui ne nasce l'apparenza del moto diurno del sole. E come la terra rivolgendosi intorno a sè stessa presenta successivamente tutti i punti della sua superficie al sole che stassi immobile; perciò ne deriva che sì fatti punti nel tempo di 24 ore dopo essere stati rischiarati restano privi di luce, e quindi tornano di nuovo ad essere illuminati, e poi col girare vengono di nuovo a perdere la luce del sole, e ne proviene così la distinzione di giorno e di notte, e l'apparenza del sole che spunta e tramonta in 24 ore. In virtù poi del moto annuo della terra sull'ecclittica ha luogo l'apparenza del moto annuo del sole nell'ecclittica stessa. Quando la terra (*fig.* 42) si trova nel punto dell'ecclittica che corrisponde alla costellazione *Aries*, il sole, ch'è in *S*, si rapporta al punto opposto dell'ecclittica, che corrisponde alla costellazione *Libra;* e camminando successivamente la terra nella sua orbita nei punti che corrispondono alle costellazioni *Taurus*, *Gemini*, *Cancer*, ec., ci pare che il sole si avanzi nei punti *Scorpio*, *Sagittarius*, *Capricornus*, ec. L'anno dunque risulta dal moto reale della terra intorno al sole, da cui deriva il moto apparente del sole nell'ecclittica. E così di mano in mano si de-

vono rapportare alla terra tutte le apparenze che noi abbiamo notato trattando del moto del sole.

248. Giova più d'ogni altro di additare in qual modo dai due moti combinati della terra nasca la differenza delle notti e dei giorni più lunghi e più corti, e in qual modo abbia luogo la variazione delle stagioni per mezzo del moto annuo della terra. A comprendere la ragione di queste apparenze, che i nostri sensi attribuiscono al moto del sole (num. 121), è da premettere che i raggi solari, come quelli che si partono da una grandissima distanza, vengono a noi come se fossero paralelli. E che i raggi paralelli cadendo sopra una sfera ne illuminano soltanto la metà, come ciascun può osservare esponendo una palla alla luce di una candela, di modo che la linea che divide l'emisfero illuminato dall'oscuro, è il circolo che si chiama *terminatore*, e costituisce l'orizzonte. Oltre a ciò è da sapersi che l'asse della terra non è perpendicolare, ma inclinato all'ecclittica sotto l'angolo *PcE* (*fig.* 42). E siccome il centro della terra o tutti i punti del suo asse *Pm* di rotazione, nell'atto che essa terra si muove, muovonsi tutti con velocità eguali e paralelle; così segue che l'asse di rotazione della terra conserva il suo paralellismo (T. I, n. 276) in tutti i punti della ecclittica, come si vede nella *fig.* 42, in cui l'asse *Pm* della terra si trova sempre paralello a sè medesimo in tutte le posizioni. È chiaro dopo ciò, che dovendo l'asse di rotazione della terra conservare il suo paralellismo, i poli debbono diversamente corrispondere all'emisfero illuminato ed oscuro. Così stando la terra in ariete e in libra, i raggi del sole percuotono perpendicolarmente l'equatore *c*, i due poli *P*, *m* sono posti nel terminatore, e tutti i paralelli terrestri sono divisi in due eguali parti. Per lo che girando la terra in 24 ore intorno al suo asse, tutti i paralelli terrestri avranno per metà il giorno e per metà la notte, e succedono i due equinozj di primavera e di autunno. Quando poi la terra è in capricorno, il polo nord *P* è nell'emisfero illuminato, e 'l polo sud *m* nell'altro oscuro. Allora i raggi che si partono dal sole *S* cadono perpendicolari sul tropico *E*, e 'l terminatore divide solamente l'equatore in due eguali parti, ma i paralelli in parti ineguali; di modo che tra questi paralelli, quei che sono situati verso il polo illuminato hanno una parte più grande della loro

circonferenza nell'emisfero illuminato che nell'oscuro. E però girando la terra, i punti corrispondenti a quei paralelli stanno più nell'emisfero illuminato, godono dei giorni più lunghi e delle notti più brevi, mentre i paralelli simili che sono verso il polo sud hanno una maggior parte della loro circonferenza nell'emisfero oscuro che nell'illuminato, ed hanno perciò le notti più lunghe e i giorni più brevi. Il contrario avviene allorchè la terra si ritrova in cancro; i raggi del sole cadono perpendicolari sull'altro tropico, il polo nord entra nell'emisfero oscuro, e 'l polo sud nell'illuminato; i paralelli verso il polo nord restano in più parte in quello che in questo emisfero, e gli altri all'inverso che sono verso il polo sud, restano in più parte nell'illuminato che nell'oscuro emisfero; e però questi godono dei giorni più lunghi e delle notti più brevi, mentre quelli hanno nello stesso tempo i giorni più brevi e le notti più lunghe. Dall'inclinazione adunque e dal paralellismo dell'asse della terra che si rivolge nell'ecclittica, deriva che va successivamente presentando normalmente al sole i punti intermedj tra i due tropici, e perciò ne risulta l'apparenza del sole, che movendosi si parte da un tropico, e passando per l'equatore arriva all'altro tropico, e poi ritornando da questo ripassa per l'equatore, e giunge al tropico da cui si partì. Nasce parimente da ciò, che tutti i popoli situati in mezzo ai due tropici hanno due volte l'anno il sole perpendicolare sopra la loro testa, e che tutti quei i quali abitano sotto le zone temperate, o tra i circoli polari e i tropici, non hanno mai il sole perpendicolare sopra la loro testa. E finalmente risulta dal paralellismo e dall'inclinazione dell'asse della terra l'ineguaglianza dei giorni e delle notti, e la variazione delle stagioni. Poichè quando la terra è in libra, il sole ci pare in ariete; e perchè allora i raggi solari percuotono normalmente l'equatore, il circolo terminatore taglia in due parti eguali l'equatore e tutti i paralelli terrestri, e succede l'equinozio di primavera. Va camminando in seguito la terra dalla costellazione di libra per tre mesi in quella dello scorpione, del sagittario e del capricorno, ed a noi pare che il sole si muova nel toro, nei gemini ed in cancro, e succede il solstizio di state. Passa indi la terra per altri tre mesi dalla costellazione di cancro nell'aquario, nei pesci ed

in ariete, e 'l sole in riguardo a noi fa vista di muoversi per la costellazione del leone, della vergine e di libra, e succede l' equinozio di autunno. Prosegue la terra il suo cammino per le costellazioni del toro, dei gemini e di cancro, in cui avviene il solstizio d' inverno, perchè il sole fa sembiante di muoversi pel sagittario, scorpione e capricorno. E finalmente percorre la terra le tre costellazioni di leone, della vergine e di libra, in cui ritorna l' equinozio di primavera.

249. Tutti questi passaggi della terra si dimostrano agli occhi per mezzo di una macchina chiamata dagl' Inglesi il *tellurian*, il quale chiaramente c' indica come la terra conservando costante la sua inclinazione e 'l suo paralellismo, va presentando al sole, ch' è immobile, i varj punti interposti ai due tropici che ne accolgono perpendicolari i raggi. Poichè se l' asse della terra fosse perpendicolare all' ecclittica, il sole cadrebbe sempre normalmente sopra l' equatore, e ne avverrebbe un equinozio perpetuo e una sola stagione. E se l' asse inclinato non conservasse il suo paralellismo, non potrebbe succedere la costanza e regolarità delle stagioni, perchè il sole non andrebbe successivamente e periodicamente cadendo perpendicolare sopra gli stessi punti della terra che sono compresi tra i due tropici. La stessa macchina in fine ci dà a vedere che l' altro elemento per dichiarare la differenza dei giorni e delle notti risulta dal paralellismo dei raggi solari, per cui il sole non può illuminare per ciascun giorno che un solo emisfero del globo della terra. In fatti se rischiarasse ora più ora meno di un emisfero, non sarebbero più corrispondenti le notti più lunghe dell' emisfero australe alle più corte del boreale, e all' inverso; ma i giorni e le notti sarebbero irregolarmente ora più lunghi ed ora di minor durata, e forse non succederebbero gli equinozj. Tutti in somma i fenomeni delle stagioni da noi dichiarati nei num. 121 e 122 per mezzo delle apparenze del sole che si muove, si vengono di leggieri e naturalmente a spiegare col movimento diurno ed annuo della terra.

250. Le apparenze dei pianeti debbono risultare e di fatto risultano da due moti: l' uno ch' è proprio a ciascun pianeta, e l' altro è il moto della terra, il quale si applica in senso contrario a ciascun pianeta. In virtù del loro moto proprio i pianeti inferiori stan sottoposti

a fasi come la luna. Imperocchè splendendo per una luce che s'imprestano dal sole, come si rivolgono nella loro orbita, ora presentano alla terra tutto l'emisfero illuminato, ed ora parte, o pure non ce lo mostrano affatto. Ma combinandosi questo moto proprio e reale dei pianeti inferiori con quello della terra, ne segue ch'essi ora compariscono diretti, ora retrogradi ed ora stazionarj. Quando il pianeta dopo la di lui superiore congiunzione da E passa in A (*fig.* 43) la terra da M si porta in G per un arco minore di EA, perchè i pianeti inferiori muovonsi più presto della terra. Da M il pianeta ch'è in E si rapporta in n nel zodiaco vicino alla costellazione dei gemini, ma riguardato da G nel punto che si trova in A ci pare di essere in a vicino alla costellazione di cancro. In questa posizione, siccome il moto EA del pianeta è quasi in senso contrario a quello della terra per MG; così avviene che trasportandosi al pianeta il moto della terra in una direzione contraria a quella della terra, cioè a dire nella direzione del cammino del pianeta, il moto del pianeta per la stessa direzione ch'esso ha, risulta dalla somma del moto proprio e di quello della terra, e il pianeta ci pare che percorra l'arco na. E così ci fa vista che il pianeta percorra na secondo l'ordine dei segni. Si muove poi la terra da G in H, e il pianeta da A in F, per cui il pianeta in F riguardato da H si vede nello stesso luogo a del zodiaco, e si considera come se fosse stazionario in a. Passando quindi la terra da H in P, il pianeta si trova nella congiunzione inferiore, e va da F in C, e si vede come se camminasse retrogrado da a in e. In questa posizione il moto reale del pianeta da F in C, e quello della terra da H in P è nella medesima direzione, per cui applicandosi al pianeta il moto della terra in senso contrario, il suo cammino, secondo che a noi comparisce, risulta dalla differenza del suo moto proprio e del moto reale della terra, e fa sembianza di percorrere l'archetto ae. E siccome il moto apparente del pianeta per questo archetto viene dall'eccesso del suo moto proprio sopra quello della terra; così ci pare diretto in senso contrario a quello del sole, o sia contro l'ordine dei segni, e il pianeta che sia retrogrado portandosi da a in e. Come la terra cammina da P in R, il pianeta si muove da C in B, e si vede di nuovo stazionario in e; finchè la terra

giunta in *N*, e il pianeta in *D*, esso comparirà in *m* di nuovo diretto, o sia in moto secondo l'ordine dei segni.

251. Con lo stesso metodo si dichiarano le apparenze dei pianeti superiori, purchè si rifletta che il loro moto è più tardo di quello della terra. Sia *ABCD*, ec. (*fig.* 44) l'orbita della terra, *PV* quella di Marte, e *LT* un arco del zodiaco. Ove si consideri Marte quasi di restarsi in *P* nell'atto che la terra si muove nella sua orbita, perchè il suo moto è meno veloce del moto della terra, ne segue che quando essa si muove da *A* in *B*, *C*, *D*, *E*, Marte ha un moto apparente da *L* in *M*, *N*, *R* e *T*, questo moto da *L* in *T* è in senso contrario a quello della terra, e perciò comparisce diretto, perchè si perfeziona nella direzione stessa di quello apparente del sole, o sia secondo l'ordine dei segni. Quando la terra si ritrova in *A* e in *E*, che sono i punti di contatto della tangente all'orbita della terra, Marte per un breve spazio di tempo pare di essere stazionario in *L* e in *T*. Come la terra gira da *E* in *H*, e da *H* in *A*, il pianeta fa vista di ritornare da *T* in *L*, e però di essere retrogrado.

252. Si vede da ciò: 1.° Che siccome il pianeta è in opposizione col sole quando la terra è in *H*; così l'apparenza del moto retrogrado per li pianeti superiori ha luogo nelle loro opposizioni. È veramente allora il moto del pianeta superiore da *P* verso *V*, e quello della terra da *F* in *H* hanno la medesima direzione; e perciò trasportandosi al pianeta il moto della terra in senso contrario, egli deve comparire di muoversi con un moto retrogrado per l'eccesso del moto reale della terra sopra quello del pianeta. 2.° Perchè i pianeti superiori sono in congiunzione quando la terra si trova in *C*, o sia quando essa si porta da *B* in *C*, *D*, ec.; così nelle congiunzioni dei pianeti superiori il loro moto è diretto. Allora il moto della terra è in senso contrario a quello dei pianeti superiori, per cui il loro moto risulta dalla somma dei due movimenti reali: l'uno della terra applicato in senso contrario, com'è appunto il moto apparente del sole, e l'altro dal moto proprio a ciascun pianeta superiore. 3.° Le apparenze di moto diretto, stazionario e retrogrado avvengono per li pianeti inferiori in ciascuna loro rivoluzione, perchè essi sono più veloci della terra, e per li pianeti superiori in ciascuna rivoluzione della terra, perchè essa si muove più presto dei pianeti su-

periori. 4.° Finalmente percorrendo il pianeta superiore lo stesso arco LT con un moto diretto, e TL con un moto retrogrado, ne segue che il pianeta si muove più presto col diretto, e più lento col moto retrogrado; perciocchè la terra gira per la parte ACE della sua orbita, ch' è più grande dell' arco EA, quando il pianeta comparisce di muoversi direttamente da L in T.

253. Il moto della terra genera un' altra maniera di parallasse, che chiamasi *annua*. Questa parallasse si misura dall' angolo formato da due rette guidate ad un astro dal centro del sole e della terra, ed esprime la differenza tra i luoghi apparenti di un astro veduto dal centro della terra e da quello del sole. L' angolo EBS (*fig.* 31), che sottende la distanza SE tra il centro del sole S e della terra E, è la parallasse annua di Venere osservata da E e da S nel punto B della sua orbita. E come il centro del sole si tiene per immobile, e la terra gira nella sua orbita annua; perciò il luogo osservato di un astro varia come la terra si muove, e la parallasse che risulta dal moto annuo della terra si dice *annua*: in somma per mezzo di questa parallasse si riduce il luogo apparente di un astro, com' è osservato dal centro della terra a quello in cui si vedrebbe guardato dal centro del sole. Di modo che la differenza tra la parallasse annua e diurna (num. 201) in altro non consiste che nella base del triangolo parallattico; perciocchè nella diurna la base è il raggio della terra, e nell' annua è la distanza tra il centro della terra e quello del sole. Ora, cangiata la base, la parallasse annua si calcola cogli stessi metodi con cui si è valutata la diurna (n. 202). Si è quindi ritrovata la parallasse annua dei pianeti; ma dobbiamo confessare che non ostanti gli sforzi degli astronomi più diligenti non si è ancora potuta rinvenire la parallasse annua delle stelle fisse. Ultimamente nell' osservatorio di Greenwich fu dal Pond mandata ad effetto una lunga serie di osservazioni sulla lira; ed altro non si è potuto ricavare se non che nel caso questa stella abbia una parallasse, non può essere più di 0",26, quantità che è nei limiti degli errori possibili. Ma sebbene niuna osservazione ancora ci renda certi della parallasse annua sensibile in qualche stella; pure non può questo difetto mettere in forse il movimento della terra. Poichè è così grande la distanza delle stelle dalla terra, che le

due rette guidate dai centri del sole e della terra ad una stella non vengono a formare un angolo sensibile. Di modo che se dalla stella si guardasse l'orbita della terra, questa non si vedrebbe che come un punto. È quindi l'immensa distanza delle stelle che non ci rende sensibile agli occhi la loro parallasse annua, e con questa il moto annuo della terra. Non è così ove si tratta dell'aberrazione (num. 192). Poichè la velocità della terra e della luce (num. 220) si trovano tra loro in rapporti che si possono ben calcolare, e ci danno perciò a vedere la curva apparente che le stelle fisse descrivono periodicamente in un anno intorno al luogo vero loro, come centro di moto.

254. La precessione in fine degli equinozj e la nutazione si possono facilmente comprendere col solo movimento dell'asse di rotazione della terra. Sia di fatto Tt' tt' (*fig.* 53) l'orbita annua della terra nel cui fuoco sta il sole S, e sia ETQ il piano dell'equatore, e TP l'asse del polo che gli è perpendicolare; non vi ha dubbio che l'equinozio avrà luogo quando la linea TQ intersecazione dell'equatore coll'ecclittica passerà pel centro del sole, perchè allora il sole si troverà nel piano dell'equatore. Ciò posto, se la linea TQ nel tempo che la terra percorre la sua orbita restasse costantemente paralella a sè stessa, l'equinozio succederebbe sempre nei medesimi punti T, t. Ma se mentre la terra si muove per Tt la linea TQ ha un piccolo movimento; allora giunta la terra in T', quella linea non è più nella direzione $T'S'$ paralella a TQ, ma sortirà la posizione $T'Q'$, che fa con $T'S'$ l'angolo piccolissimo $S'T'Q'$. Per lo che la linea $T'Q'$ va a rincontrare il sole prima che la terra giunga in T, e l'equinozio arriva più presto. E come $T'Q'$ prolungata risponde in t' sull'ecclittica; così l'equinozio deve retrogradar da t in t' contro l'ordine dei segni, o sia in senso contrario al moto annuale della terra: all'asse in somma di rotazione della terra si deve riferire il moto del polo dell'equatore celeste indicato nel num. 190 dalla precessione. E perchè l'asse della terra, nell'atto che si muove intorno ai poli dell'ecclittica in 26mila anni, sta sottoposto ad alcune piccole e periodiche ineguaglianze, che dipendono e sono legate al periodo che ha il moto dei nodi della luna; indi è che il polo vero dell'equatore celeste pare di muoversi

in una piccola ellisse $\epsilon\ \epsilon'$. I fenomeni in somma della precessione e della nutazione non sono altro che moti lentissimi e periodici dell'asse di rotazione della terra; e tutti i movimenti delle stelle, i loro cangiamenti in declinazione e in ascensione retta non sono che apparenze ed illusioni, perchè non sono reali, e solamente è reale il picciolo moto dell'asse di rotazione della terra. E così di mano in mano, trattandosi di moti generali e comuni a tutti gli astri, sono più presto da attribuirsi alla terra sola in senso contrario, che agli astri, per potersi dichiarare con facilità e semplicità.

255. Si può adunque, posti i moti reali, adombrare l'immagine del nostro sistema planetario nella *fig.* 48, in cui stando il sole nel centro, sono indicate le orbite dei pianeti, giusta la loro rispettiva media distanza dal sole, ed eziandio l'orbita allungata di una cometa. Per lo che avendoci formata un'idea, per quanto si può, esatta del nostro sistema planetario e dei movimenti dei pianeti e loro posizione, delle leggi cui van sottoposti nei loro movimenti, non ci resta che a indicare la causa semplice e unica di tutti i moti reali degli astri, per dar perfezione alla nostra meccanica celeste; e noi l'anderemo rintracciando nei seguenti capitoli.

DELLA FISICA CELESTE

PARTE TERZA

DELL' ATTRAZIONE GENERALE

256. Sebbene l'argomento che forma l'ultima parte di questo trattato comparisca arduo e difficile, come quello che intende ad investigare le cause fisiche, o sia le forze che animano e regolano i corpi celesti nei loro movimenti, e mantengono costantemente in un perfetto equilibrio tutto il nostro sistema planetario; pure col favore delle leggi già stabilite nei moti reali degli astri, e più d'ogni altro coll'ajuto della dinamica ci sarà conceduto di rinvenire sì fatte forze, e conoscere la loro indole e il modo con cui esse operano. Imperocchè usa com'è la dinamica a considerare i movimenti e le forze di una maniera generale, e sotto un'espressione astratta che tutti li racchiude, non resta in alcun modo impicciata, se le forze sieno deboli o potenti, poche o molte, se la loro azione sia riunita o separata, o pure si favoriscano o si contrastino; e colla stessa facilità con cui ha valutato la caduta verticale di un grave, le oscillazioni di un pendulo, il gitto di una bomba, e il giro di una fionda, giungerà a calcolare il moto dei pianeti, e ad assegnare la forza che sospinge e bilancia le grandi masse planetarie. A dar dunque perfezione a questo trattato, altro non è da praticarsi che applicare i teoremi, già da noi esposti, della meccanica ai movimenti già conosciuti dei pianeti, e da questa applicazione chiaro risulterà la cognizione delle forze e delle cause fisiche che governano il nostro sistema, e ne nascerà propriamente la *meccanica celeste*, la quale in altro non consiste che nella meccanica applicata ai moti dei corpi celesti.

CAPO PRIMO

DELL' ATTRAZIONE COME CAUSA DEI MOTI CELESTI, E DELLE LEGGI SECONDO CUI ESSA OPERA.

257. Siccome tutti i pianeti (num. 227) e le comete (num. 238) movendosi intorno al sole descrivono coi loro raggi vettori aree che sono proporzionali ai tempi; così è certo (num. 102) che gli uni e le altre sono animati nelle loro trajettorie da una forza centrale diretta a un punto fisso, ch' è il centro del sole da cui si partono i loro raggi vettori. E perchè i satelliti accompagnano i pianeti principali nel giro che questi fanno intorno al sole, e nel medesimo tempo si movono intorno ai pianeti principali colla stessa regolarità, come se questi stessero in una perfetta quiete; perciò ne segue che la stessa forza centrale, la quale opera sopra i pianeti principali, va pure sospingendo i satelliti; e in virtù di essa il sistema tutto dei satelliti e del pianeta principale cammina con un moto comune, il quale non altera in alcun modo l'ordine, il periodo e la regolarità dei moti dei satelliti in riguardo al pianeta principale. In questo modo ciascun pianeta co' suoi satelliti forma un sistema, ed è nel caso stesso di una nave in cui tutti i corpi muovonsi come se la nave fosse in riposo, perchè la nave e i corpi che in essa sono camminano con un moto comune. Dal sole adunque si parte una forza la quale si estende indefinitamente nello spazio, e operando sopra i corpi che sono compresi nella sfera della sua attività, raggiunge tutti i pianeti, e con essi tutti i satelliti, e deviandoli continuamente dalla linea retta, li obbliga a girare intorno al suo centro.

I satelliti non solamente sono sospinti da una forza diretta verso il centro del sole, ma ancora da una forza diretta verso il centro dei loro rispettivi pianeti principali. Poichè la luna nel girare intorno alla terra, i satelliti di Giove, di Saturno e di Urano nelle loro orbite descrivono tutti (num. 230) delle aree proporzionali ai tempi.

Si dovrebbe ora ricercare se la forza centrale che ritiene i singoli pianeti e le comete, sia la stessa, e se

quella che obbliga i satelliti a girare intorno ai pianeti principali, sia della stessa natura di quella che si parte dal centro del sole. Ma per soddisfare degnamente a sì fatti quesiti, è prima da sapersi in qual modo operano le forze centrali del sole e dei pianeti; perciocchè se gli effetti sono esattamente gli stessi, e se operano precisamente secondo le medesime leggi, dalla identità delle leggi o degli effetti si deve conchiudere l'identità delle cause e delle forze, per la ragione che noi non possiamo in altro modo conoscere e ragionare delle forze che dagli effetti sensibili ch'esse producono.

258. Da ciò che i pianeti intorno al sole e i satelliti intorno ai loro pianeti principali descrivono ellissi, chiaro ne segue, in virtù del num. 107, che la forza centrale da cui sono continuamente costretti a girare, opera in ragione inversa dei quadrati delle distanze. E in riguardo alle comete, già si è da noi dimostrato ch'esse percorrono dell'ellissi molto eccentriche (num. 237); e perciò è da credersi che esse sieno pure ritenute da una forza centrale, che opera in ragione inversa del quadrato della distanza. Ma se in luogo di muoversi in ellissi, venissero a percorrere delle iperboli, come ad alcuni piace, sempre sarà vero che la forza centrale che le distorna dalla linea retta, opera sopra esse in ragione inversa del quadrato della distanza; perciocchè, sia che i corpi girino in ellisse, sia che percorrano un'iperbole, pel num. 107, la forza centrale deve essere sottoposta alla legge invariabile di operare in ragione inversa del quadrato della distanza. La forza centrale adunque che partendosi dal sole ritiene i pianeti e le comete, o pure che partendosi dai pianeti principali ritiene nei varj punti delle loro orbite i satelliti, è di tale natura ed è sottoposta ad una legge costante e invariabile, che la sua energia va menomando non in ragione della semplice distanza, ma del quadrato della distanza.

259. Sebbene si potesse supporre che questa forza centrale fosse particolare a ciascun pianeta, e in virtù di essa fosse ciascuno spinto verso il sole; o pure che il sole esercitasse forze centrali tutte diverse pe' diversi pianeti che sono in moto intorno a lui; pure la dinamica ha del tutto escluso simili supposizioni per mezzo della terza legge di Keplero. Imperocchè essendo i quadrati dei tempi periodici dei pianeti nella stessa ragione dei

cubi delle loro medie distanze (num. 228), ne ricava incontrastabilmente che tutti i pianeti sono legati per un comune legame, per unica forza cioè (num. 113) diretta a un comune fuoco o a un comune centro, la quale è più o meno potente reciprocamente ai quadrati delle distanze dei pianeti. E siccome le comete, le quali hanno diretta la loro forza al sole, ubbidiscono alla terza legge di Keplero, per quanto si può da noi osservare e ricavare dalla legge delle aree loro che sono proporzionali ai tempi; così è da conchiudersi che anch'esse hanno nel centro del sole un comune fuoco, e che da questo comune fuoco si parte la forza che signoreggia e pianeti e comete. Non si danno dunque tante forze quanti sono i corpi celesti che circolano intorno al centro del sole, nè dal centro del sole si sviluppano tante forze diverse quante sono i corpi celesti che d'intorno gli girano; ma una è la forza che incatena e ritiene i pianeti e le comete, la quale operando reciprocamente ai quadrati delle distanze varia la sua energia in ciascun pianeta, in ciascuna cometa, e produce i moti più o meno rapidi, più o meno lenti dei pianeti e delle comete nelle loro trajettorie. Se Mercurio fosse collocato alla distanza di Urano perderebbe la sua rapidità, e si moverebbe colla lentezza di questo lontano pianeta; se Urano fosse trasportato nello stesso sito di Mercurio, all'istante lascerebbe la sua pigrizia, e fatto più vivo nel suo movimento comincerebbe a girare colla stessa rapidità di Mercurio; e se tutti i pianeti e le comete fossero posti alla medesima distanza dal sole, tutti in virtù della sola forza centrale sarebbero animati dalla stessa energia, diretti con eguale impeto verso il centro del sole, egualmente distornati dalla linea retta, e si moverebbero colla stessa velocità. È quindi da conchiudersi che *i pianeti e le comete si muovono in giro al loro comun fuoco in virtù di unica forza, la quale partendosi dal comune centro del loro moto opera in ragione inversa del quadrato delle distanze.*

I satelliti son pure legati ai loro pianeti principali, e formano con essi un unico sistema, perchè obbediscono parimente (num. 233) alla terza legge di Keplero. La forza dunque centrale che li sospinge, risiede in un fuoco comune, ch'è il centro dei pianeti principali, intorno a cui muovonsi, e opera in ragione inversa dei quadrati delle distanze.

E però *la forza che si parte dal centro dei pianeti forniti di satelliti, è della stessa specie della forza che si parte dal centro del sole, e mette in moto i pianeti*, perchè opera giusta la stessa legge.

260. Oltre all'analogia, la quale ci avverte che la stessa forza comune al sole e ai pianeti accompagnati da satelliti debba trovarsi in tutti i corpi celesti, egli è certo che come i pianeti e le comete tendono verso il sole, questo astro deve dirigersi verso ciascun di loro; e nella stessa guisa che le lune tendono verso i pianeti principali, questi debbono tendere verso loro, perchè è legge costante della natura che all'azione, eguale e contraria corrisponde la reazione. Ora l'azione ch'esercita il sole sopra ciascun pianeta, e ciascuna cometa o luna, è tale che opera in proporzione alle loro masse, per la ragione che posti tutti a distanze eguali si porterebbero tutti (num. 259) con egual impeto e velocità verso il sole: la reazione adunque che proviene da ciascun corpo celeste, come quella ch'è eguale all'azione, si esercita sulla massa solare in ragione delle loro singole e rispettive masse. E però tutti *i corpi che fan parte del sistema solare sono dotati della medesima forza, per cui gli uni sono diretti mutuamente verso gli altri; e questa forza è proporzionale alle loro masse, e sviluppa la sua energia nella ragione inversa dei quadrati delle loro rispettive distanze.*

261. Questa forza, che risiede in tutti i corpi del nostro sistema, e sollecitando gli uni verso gli altri li ritiene tutti nelle loro orbite, si chiama *attrazione*. Ma questo vocabolo altro non esprime che una nostra maniera di vedere senza più; perciocchè noi ignoriamo in che consista l'attrazione, e se veramente si attirino i corpi celesti. Quello che di certo sappiamo, egli è che tutti i corpi celesti sono dotati di una forza che opera in ragion diretta delle masse, e nell'inversa dei quadrati delle distanze. Se poi questa forza derivi o no da un potere attrattivo o d'altro, non si è potuto finora definire, e forse non si potrà mai determinare, perchè dipende dalla natura dei corpi, che, per quanto pare, è fuori d'ogni nostra cognizione. Bastaci adunque di spiegare i movimenti celesti per mezzo di una forza di cui si conoscono le leggi giusta le quali opera, e poi considerando una sì fatta forza come proveniente da un potere

attrattivo, non intendiamo far altro che indicar ciò che agli occhi nostri si presenta; cioè che i corpi celesti tendono mutuamente gli uni verso gli altri, come se tra loro reciprocamente si attirassero; e perciò chiamiamo attrazione la causa incognita della forza che ritiene e sollecita i corpi celesti nelle loro orbite.

262. Comparando l' attrazione solare colla gravità, chiaro si vede che esse sono la stessa forza, perchè operano a norma delle medesime leggi.

La gravità è proporzionale alle masse dei corpi terrestri, come l'attrazione. Indi è che i corpi terrestri nel vôto posti a distanze eguali cadono con eguale velocità verso il centro della terra, come si porterebbero con eguale impeto a distanze eguali i corpi celesti verso il centro del sole, per cagione del rapporto dei quadrati dei loro tempi periodici ai cubi delle loro medie distanze. La gravità adunque e l'attrazione convengono primieramente in ciò, che sono proporzionali alle masse.

Se i corpi terrestri si potessero condurre a grandi distanze dalla superficie della terra, ci sarebbe facile di osservare se l'energia della gravità va menomando in ragione dei quadrati delle distanze, come l'attrazione. Ma in difetto di tali osservazioni è da riflettersi che col favore dei penduli trasportati sulle cime dei monti ci è venuto fatto di conoscere che la gravità va mancando di potenza sopra gli altri monti, perchè questi sono più lontani dal centro della terra, che non sono i luoghi della sua superficie. Di che è lecito argomentare che la diminuzione della gravità sarebbe più sensibile se le distanze fossero più notabili, che non sono i nostri monti più alti. Ma in difetto di osservazioni da potersi dirizzare sopra corpi terrestri, ci possiamo rivolgere alla luna, e supporre ch'essa ruoti intorno al centro della terra in virtù della gravità. Imperocchè la luna nel suo movimento (num. 163) è animata da una forza centrale diretta al centro della terra, da cui si parte la gravità; e la gravità, la quale opera la caduta parabolica (n. 83) dei gravi lanciati obbliquamente, è atta a cambiare il moto parabolico in circolare (num. 85), o pure ellittico (num. 110), come ad essa si congiunge una data forza di projezione. Se dunque la gravità è capace di ritenere la luna nella sua orbita, e la luna si muove in virtù di una forza che si parte dal centro della terra,

d'onde anche si muove la gravità che raggiunge e opera sopra i corpi terrestri, siamo abilitati con fondamento a comparare la forza centrale della luna colla forza della gravità per conoscere se sieno due forze diverse, o pure se sia l'unica forza gravità che ritiene la luna nella sua orbita. La forza centrale della luna in 1' è rappresentata dal seno verso (num. 92) dell'arco che essa descrive nel medesimo tempo, e questo seno verso è eguale (n. 92) al quadrato dell'archetto che la luna percorre in 1' diviso pel diametro della sua orbita. Questo archetto è $\frac{1}{39343}$ parte dell'orbita della luna che corrisponde a 32",941; perciocchè il tempo periodico della luna si riduce a 39343' (num. 167), e da questo diviso risulta all'orbita tutta un arco di 32" per 1' di tempo. Per ridursi poi 32" in piedi, è da sapersi che giusta i calcoli della parallasse lunare (num. 208) la distanza media della luna dalla terra è eguale a 60, 314 semidiametri terrestri, di modo che multiplicando la circonferenza dell'equatore terrestre ridotta in piedi per 60, si ricava prima l'orbita lunare espressa in piedi, e poi il valore di 32" della medesima orbita. Ora il quoziente del quadrato dell'archetto, che la luna percorre in 1' diviso pel diametro della sua orbita, o sia il suo seno verso ch'esprime il valore della forza centrale in 1', è eguale a 16 piedi inglesi e 1 poll. Ciò posto, la forza centrale, la quale ritiene la luna e si parte dal centro della terra, essendo espressa da 16 piedi in 1' alla distanza di 60 raggi terrestri, com'essa opera in ragione inversa dei quadrati delle distanze (num. 259), avrebbe per valore 3600 volte 16 piedi, ove la luna si portasse alla distanza di un solo raggio dal centro della terra o sia alla sua superficie. Di che è chiaro che la forza centrale della luna alla superficie della terra opererebbe colla stessa energia con cui opera la gravità su i corpi terrestri; perciocchè la forza di gravità essendo espressa da 16 piedi in un 1" sulla superficie della terra, in 60" o sia in 1' sarebbe eguale a 3600 16 piedi (num. 10). E parimente se un grave fosse trasportato alla distanza della luna o sia a 60 raggi terrestri, la forza di gravità la quale fa cadere i gravi alla distanza di un raggio terrestre di 16 piedi in 1", e perciò di 3600 volte 16 piedi in 1', ove essa venisse a diminuire nella ragione inversa dei quadrati delle distanze,

lo farebbe cadere in 60″ o in 1′ di soli 16 piedi, come la luna cade in virtù della sua forza centrale. La forza centrale adunque che ritiene la luna, la sollecita come la gravità anima i corpi terrestri, e la forza gravità alla superficie della terra produce gli stessi effetti della forza centrale della luna; laonde dall' identità degli effetti e delle leggi si può benissimo argomentare l'identità della causa, e che la gravità sia la forza centrale della luna.

263. La Place ha intrapreso un' altra strada per dimostrare che la luna in ciascun istante è ritratta dalla tangente alla sua orbita per la forza gravità. Siccome uno degli elementi necessarj è il valore esatto del raggio dell' orbita lunare, il quale non sia in alcun modo affetto dalle cause che perturbano il corso della luna nella sua orbita, le quali sono molte, come innanzi diremo; così dovendosi questo valore ricavare dalla parallasse media della luna (num. 208), ha scelto quella parte di questa parallasse lunare ch' è independente da tutte le ineguaglianze a cui è soggetta la luna, e che gli astronomi chiamano la *costante della parallasse*. Indi ha ricavato questa costante nella supposizione che la gravità, decrescendo in ragione del quadrato della distanza, ritiene la luna nella sua orbita; e poi l'ha comparato colla costante che risulta dalle osservazioni astronomiche; di sortachè l'identità delle due parallassi, l'una ritratta dalla gravità e l'altra dall' osservazione, viene ad essere una prova che veramente la gravità si estende sino alla luna, e la mette in movimento con una energia che viene meno in ragione del quadrato del raggio dell' orbita lunare. Per istabilire lo spazio che i gravi percorrono nella superficie della terra in virtù della gravità, sceglie un punto alla latitudine di 45°, in cui si conosce il valore del raggio della sferoide terrestre, e la lunghezza del pendulo che batte i secondi, affinchè da questa lunghezza si calcolasse (num. 61) con esattezza lo spazio che trascorrono i gravi in 1″. Oltre a ciò, riflettendo che la forza centrifuga proveniente dalla rotazione della terra scema in questo paralello il vigore della gravità di $\frac{1}{288}$, ch'equivale alla 432ma parte dello spazio che percorrono i gravi in 1″, aggiunge questa porzione di spazio a quello già ritrovato per mezzo del pendulo, e così determina con precisione la forza gravità alla distanza di un raggio sotto

il parallelo di 45°. Dopo ciò si rivolge alla luna, e calcola lo spazio di cui deve cader la luna in virtù della forza gravità, e in luogo d'introdurvi il quadrato del raggio dell'orbita lunare, ch'esprime la distanza della luna dal centro della terra, vi sostituisce quello del seno della parallasse, che vale lo stesso. E come lo spazio così ritrovato non può essere esatto, perchè il sole diminuisce la caduta della luna verso la terra, e altre cause la disturbano; così, fatte le convenienti aggiunte e sottrazioni, fissa lo spazio per cui scende la luna in 1″ verso la terra in virtù della gravità. Ora dopo questi e altri calcoli diligentissimi ha ritrovato che la costante della parallasse lunare nel paralello di 45° è di 6321″,2, la quale non si differisce dalla parallasse ricavata da Trienescker per mezzo di tanti ecclissi e occultazioni di stelle per la luna che di presso a 3″; perciocchè la parallasse osservata è 6324″,7. E perchè una differenza così piccola delle due parallassi si trova nei limiti degli errori che sogliono aver luogo nelle osservazioni e nei calcoli; perciò è da trascurarsi, e si può con sodezza conchiudere che la forza principale che ritiene la luna nella sua orbita, è la gravità terrestre diminuita in ragione del quadrato della distanza.

Le quali cose così essendo, egli è certo che la natura opera sulla terra, come nei cieli, con unica forza; perciocchè la gravità non è diversa dall'attrazione, e in virtù della stessa forza e giusta le stesse leggi cedono i gravi, rotola una pietra, si lancia una bomba, gira la luna e si muovono nelle loro orbite i pianeti e i satelliti. Indi è che la gravità terrestre si deve considerare come un caso particolare dell'attrazione, o sia di una legge generale che governa tutta la natura. Laonde l'attrazione si può chiamare *gravitazione*, e si può con indifferenza ed egualmente dire: i pianeti pesano verso il sole, e i gravi sono attratti dal centro della terra. Di più, siccome il potere della gravità si trova raccolto nel centro di gravità della terra, e da questo punto si computano le distanze in cui sono i corpi, dal loro potere attrattivo; così nella stima delle distanze in cui sono i pianeti, dal potere attrattivo del sole, o i satelliti dal potere attrattivo dei loro pianeti principali, si deve stabilire l'origine di queste distanze, o la sede dell'attrazione dal centro di gravità del sole, o da quello dei pianeti principali.

Finalmente i corpi pesano verso il centro della terra in proporzione alla loro massa, ed essi come sono attratti dal centro della terra reagiscono, e attirano parimente la terra in proporzione della loro quantità di materia, perchè all'azione eguale e contraria succede la reazione. Ora se i corpi terrestri, grandi o piccoli che sieno, tutti attirano e sono attirati in proporzione al numero delle loro molecole o massa, è ben da conchiudersi che ciascuna particella della materia terrestre è fornita della forza gravità, o sia attrazione. Elevandoci dunque dalla terra ai corpi celesti, i quali sono dotati della stessa forza che opera a norma delle stesse leggi, è da stabilirsi che l'attrazione non conviene ad essi solamente in massa, ma che sia propria di ciascuna delle loro molecole. E però l'attrazione, ch'è la causa fisica dei movimenti dei corpi celesti, si può esprimere sotto una forma generale dicendo: *tutte le molecole della materia si attirano mutuamente in ragion delle masse e reciprocamente al quadrato delle distanze.*

CAPO II.

DEI MOTI ASSOLUTI E RELATIVI DEI CORPI CELESTI, E DELLA LORO MASSA, DENSITÀ E FIGURA.

264. Essendo formato ciascun corpo celeste di un numero indefinito di molecole le quali sono fornite di un potere attrattivo, la forza con cui ciascuno attrae è risultante dalle attrazioni particolari di tutte le sue parti. I matematici han calcolato che nelle sfere, o pure nelle sferoidi poco differenti dalle sfere, come sono i corpi celesti, sia che fossero di uniforme densità, o pure di densità variabile secondo una legge qualunque, questa risultante è collocata nel centro di loro gravità; cioè a dire, attraggono come se tutta la loro massa fosse riunita nel loro centro di gravità. In questo senso la terra attrae il sole col suo centro di gravità, e il centro di gravità del sole quello della terra, e tutti i corpi celesti non sono da riguardarsi che come tanti punti i quali raccolgono in sè stessi tutta la loro massa, e attraggono in proporzione alla medesima. E veramente, siccome l'attrazione delle particelle di un corpo di una figura qualunque le più lontane dal punto attirato, e quella

delle particelle le più vicine si compensano di maniera che l'attrazione totale è per poco la stessa, come se tutte le particelle materiali del corpo fossero riunite nel suo centro di gravità; così potendosi considerare i diametri e le dimensioni dei pianeti e dei satelliti come infinitesime e quasi nulle in rapporto alla distanza loro in riguardo al sole o ai pianeti principali, è da conchiudersi che i singoli corpi celesti, come i pianeti, le comete, ec., pressochè si attirano come se le loro masse fossero riunite nei centri rispettivi di loro gravità.

Il sistema solare è composto di tanti sistemi parziali, come sono quelli dei satelliti con i loro rispettivi pianeti principali. E perchè in questi sistemi le distanze dei satelliti al loro pianeta sono notabilmente più piccole, che non è la distanza del pianeta al sole; perciò ciascun sistema attrae come se i corpi dei satelliti e del pianeta fossero riuniti nel loro centro comune di gravità. Sotto questo riguardo ciascun sistema è un punto o un centro di gravità, in cui stan raccolte tutte le masse dei corpi che lo compongono, e il sistema tutto solare si considera come un sistema di punti che vicendevolmente si attraggono in ragione inversa dei quadrati delle distanze. Indi è che da noi si è accennato nel n. 263 che le distanze tra i corpi celesti sien da computarsi dai loro centri di gravità.

265. Siccome quando un corpo gira intorno ad un altro, ambidue girano e descrivono curve simili intorno al loro comune centro di gravità; così la terra e la luna attirandosi per li loro centri di gravità, l'una e l'altra circolano intorno al loro comune centro, sebbene la curva descritta dal centro della terra sia piccola e insensibile per noi, perchè il comune centro di gravità della luna e della terra è molto vicino al centro di questa. Parimente Mercurio e il sole ambidue girano intorno al loro comune centro di gravità; e così accade per gli altri pianeti e per le comete. Nel sistema adunque planetario non ci è alcun corpo in riposo; noi non ci moviamo intorno al sole, ma intorno al comune centro di gravità della terra e del sole; e il sole stesso descrive una piccola ellisse, come fanno i pianeti, intorno al comune centro di gravità.

266. I centri di gravità dei pianeti sforniti di satelliti descrivono le loro orbite ellittiche intorno al centro di

gravità comune ad essi, e al centro di gravità della massa solare. Nei sistemi poi parziali non sono i centri di gravità dei pianeti principali o dei satelliti che descrivono orbite ellittiche intorno al sole, ma i centri di gravità di questi sistemi sono quei che girano intorno al comune centro di gravità tra essi e il sole. E come il moto e la velocità del centro di gravità di un sistema non è in alcun modo alterato (Tomo I, n. 272) dalla mutua azione dei corpi che lo compongono; così il centro di gravità di Giove e dei suoi satelliti, di Saturno e delle sue lune, ec., gira e si muove in virtù della risultante di tutte le forze attrattive dei corpi del sistema, descrivendo un'ellisse intorno al centro di gravità comune ad esso e al centro di gravità del sole.

Nasce da ciò: 1.° Che nella teorica dei pianeti e delle comete non si considera principalmente che l'azione mutua di due corpi o di due centri di gravità, cioè a dire quella di un pianeta o di una cometa, o pure di un sistema col sole; e nella teorica dei satelliti, l'azione mutua di un satellite e del suo pianeta, o sia dei loro centri di gravità. 2.° Che il punto in cui si bilancia tutto il sistema solare, è il centro di gravità comune al sole, ai pianeti e alle comete, il quale si sta in riposo, o pure si muove, secondo che ad alcuni piace, intorno ad un altro centro, nella stessa guisa che il centro di gravità di un sistema di satelliti col loro pianeta principale gira e si muove intorno al centro comune di gravità del sistema solare. Newton per rappresentare l'equilibrio del nostro sistema immaginò una leva diritta che porta ad un'estremità la massa del sole, e all'altra estremità le masse tutte dei pianeti, delle lune e delle comete, il cui punto di appoggio è situato nel centro comune di gravità del sole e degli altri corpi del nostro sistema, intorno a cui sole, comete e lune si tengono in equilibrio, e intorno a cui si muovono descrivendo orbite ellittiche i pianeti, le comete e il sole stesso. Ma come questo punto secondo i calcoli di Newton non è così lontano dal centro di gravità del sole, che cada fuori della massa solare; perciò il centro del sole gli descrive intorno una piccola ellisse, e gli effetti di questo moto divenendo per noi insensibili a cagione della distanza notabile in cui siamo dal sole, ci pare che il sole non si muova e stia in riposo.

267. I movimenti dei corpi celesti, i quali han luogo in virtù della mutua attrazione tra un pianeta e il sole, tra un satellite e il pianeta principale, si dicono *assoluti*, e si avverano intorno al centro comune di loro gravità. Ma questi moti si comprendono e si calcolano da noi senza che si veggano; perciocchè l'osservazione non ci dimostra altri moti che quei di un corpo in riguardo ad un altro, o, come diconsi, i moti *relativi*. In fatti noi non vediamo il centro di gravità del sistema di Giove che gira intorno al centro di gravità comune al sole e al sistema di Giove, ma solamente Giove che si muove intorno al sole; nè per noi si muove il centro di gravità comune alla terra e alla luna, che gira intorno al centro di gravità comune al sole e al sistema della terra e della luna, ma ci pare che la luna circoli intorno alla terra, e la terra intorno al sole, o sia si osservano i loro moti relativi. Per dimostrare adunque che il principio dell'attrazione combina esattamente colle osservazioni, è da provarsi che in virtù dell'attrazione i moti relativi si perfezionano a norma delle stesse leggi degli assoluti, e che introducendo la forza attrattiva nei moti relativi, questi spontaneamente riduconsi agli assoluti.

268. Nei moti relativi si considera un corpo che si muove intorno ad un altro, come se questo fosse in quiete, quando in verità ancor esso si muove. Marte e il sole in virtù della loro mutua attrazione si muovono tutti due, mentre secondo il moto relativo ci pare che Marte giri intorno al sole in riposo. A ridurre dunque i moti assoluti dei corpi celesti ai relativi, è da porsi in quiete il sole in riguardo ai pianeti e alle comete, o pure un pianeta in riguardo ai satelliti, senza alterare la mutua loro attrazione, che realmente gli anima e mette in movimento Ed a ciò fare basta d'imprimere al pianeta e al sole una velocità comune, e un comune movimento eguale all'azione del pianeta sopra il sole. Imperocchè imprimendo a Marte nel senso del suo moto e della sua tendenza verso il sole un moto eguale all'azione attrattiva ch'esso esercita sopra il sole, Marte si muoverà in virtù di due forze attrattive, cioè a dire dell'azione della massa solare sopra di lui, e dell'azione ch'esso esercita sopra il sole; ed imprimendo al sole un moto eguale e in senso contrario a quello ch'esso eseguisce verso Marte, il sole dal movimento passerà alla quiete,

perchè i due moti eguali e contrarj si distruggeranno. Nè questo altera in alcun modo la disposizione dei movimenti. Poichè la velocità che s'imprime al pianeta e al sole, è la stessa come quella che è rappresentata dalla sola azione di Marte; questa velocità s' imprime ad entrambi nelle direzione di Marte verso il sole, per cui viene ad avverarsi sul pianeta nel medesimo senso del suo moto verso il sole, e nel sole in senso contrario al suo moto verso il pianeta; e finalmente si sa dai principj della meccanica che il moto relativo dei corpi di un sistema non si cangia, ove s'imprime a ciascun di loro una velocità comune. Per ridurre dunque il sole in quiete, non è altro da farsi che considerare Marte sollecitato verso il sole, non in proporzione all'azione attrattiva o sia massa del sole, ma in proporzione alla somma delle due azioni attrattive, o sia delle due masse del sole e di Marte. E generalmente per ridurre il moto assoluto di un pianeta o di un satellite al relativo, conservando la legge della loro mutua attrazione verso il sole e verso il pianeta principale, è da riguardarsi il pianeta o il satellite come animato da una forza reciproca al quadrato delle distanze, e proporzionale alla somma delle masse del pianeta e del sole, o del satellite e pianeta principale. Allora il pianeta si muove, e il sole resta immobile; il satellite gira, e il pianeta principale è in riposo.

269. Ora se i pianeti nei loro moti relativi intorno al sole, o i satelliti intorno ai loro pianeti principali sono sospinti in virtù dell'attrazione per una forza proporzionale alla somma delle loro rispettive masse, e nella ragione inversa del quadrato delle loro distanze, è chiaro, pel num. 108, che essi debbono tracciare una sezione conica, o sia che la loro mutua azione non può turbare il moto ellittico ch'essi descrivono, giusta l'osservazione (num. 224). L'attrazione adunque ci conduce ai resultati medesimi che noi ricaviamo dall'osservazione; perciocchè operando nella ragione inversa dei quadrati delle distanze, sia ch'essa equivalga alla massa sola del sole, o alla massa del sole e del pianeta, sempre sarà vero che le orbite dei pianeti saranno ellittiche, e come tali descriveranno costantemente aree proporzionali ai tempi nei moti relativi, i quali da noi si osservano.

L'unica legge cui non potrebbero esattamente ubbidire i pianeti nei loro moti relativi, in virtù della mutua

attrazione, sarebbe quella dei quadrati dei tempi periodici, i quali hanno lo stesso rapporto tra loro, che i cubi delle loro distanze medie. Imperocchè nel num. 228, in cui si è dimostrata la verità di questo rapporto, abbiamo posto in calcolo la forza centrale, come quella che varia nella ragione inversa del quadrato delle distanze; e non abbiamo tenuto in alcun conto le masse dei corpi circolanti, considerandole come tanti punti o sforniti di massa, o pure risultanti di masse eguali. Ma ora che calcoliamo i moti relativi, nei quali la forza non solamente opera nella ragione inversa dei quadrati delle distanze dei corpi circolanti, ma nella diretta delle masse di tali corpi che mutuamente si attirano, dobbiamo confessare che, come è diversa la massa dei corpi celesti i quali girano intorno al sole, viene a turbarsi e non risulta rigoroso il rapporto dei loro tempi periodici alle rispettive distanze medie; perciocchè il tempo delle rivoluzioni dei pianeti diventa più corto quanto la loro massa o sia la loro forza è relativamente più grande. I matematici esprimono la durata della rivoluzione dei pianeti nei moti relativi $T = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{(M+m)}}$, designando per T il tempo, per a la distanza media, per M la massa del sole, e per m quella del pianeta. E da questa equazione chiunque si accorge che il rapporto dei quadrati dei tempi ai cubi delle distanze medie non può essere esatto; perciocchè si avrebbe T^2 quadrato del tempo periodico di un pianeta : $\frac{a^3}{M+m}$ cubo della sua distanza media diviso per la somma della massa propria e quella del sole :: T'^2 quadrato del tempo periodico di un altro pianeta : $\frac{a'^3}{M+m'}$ cubo della rispettiva distanza media diviso per la somma della sua massa e quella del sole. Ora se $M+m$ fosse eguale a $M+m'$, ne seguirebbe $T^2 : T'^2 :: a^3 : a'^3$; ma come m non è eguale a m', così viene a variare il rapporto dei tempi alle distanze medie. Oltre di che quanto m è maggiore di m', tanto T è più corto di T'. Ma trascurando m e m' come molto piccole in riguardo a M, o alla massa solare, allora i cubi delle distanze medie sarebbero divise per M, o sia per la massa solare, e sarebbe $T^2 : T'^2 : a^3 : a'^3$. Questo di fatto è ciò che si pratica nel calcolo dei moti relativi. Siccome le masse

dei pianeti, per quanto innanzi si dirà, sono piccolissime in riguardo al sole, e quelle dei satelliti di piccol momento in riguardo alla massa dei loro pianeti principali; così si trascurano le masse dei pianeti circolanti intorno al sole, e le masse dei satelliti che girano intorno ai loro pianeti, e in seguito di ciò i quadrati dei tempi delle rivoluzioni dei pianeti o dei satelliti sono tra loro come i cubi dei grandi assi delle loro orbite, e la teorica dell'attrazione è concorde sensibilmente alle osservazioni dei moti relativi.

Si potrebbero qui ricavare gli elementi tutti dei moti dei pianeti e dei satelliti dalla loro mutua attrazione, almeno nei due casi dei moti quasi circolari dei pianeti e dei satelliti, e delle orbite molte eccentriche delle comete, come fa La Place; ma perchè ci sarebbe necessario il sublime calcolo, ci restiamo di entrare in tale argomento.

270. Dalla considerazione della mutua attrazione tra il sole e i pianeti, e tra i pianeti e i satelliti, si può ritrarre la massa di quei pianeti che son forniti di satelliti in rapporto alla massa del sole, o sia il rapporto che hanno le masse di tali pianeti a quella del sole. Infatti giusta la teorica delle forze centrali (num. 98) egli è certo che le forze da cui sono sospinti un pianeta m verso il sole M, e un satellite m' verso il pianeta principale M', ove si notano per R, r i raggi medj delle loro orbite, e per T, t i tempi delle loro rivoluzioni sideree, stanno tra loro :: $\frac{mR}{T^2} : \frac{m'r}{t^2}$. E siccome le forze attrattive sono espresse (num. 260) da $\frac{M+m}{R^2}$ e da $\frac{M'+m'}{r^2}$; così ne segue $\frac{M+m}{R^2} : \frac{M'+m'}{r^2} :: \frac{Rm}{T^2} : \frac{m'r}{t^2}$. E trascurando le masse del pianeta in riguardo a quella del sole, e la massa del satellite in rapporto a quella del pianeta principale, ne risulta M massa del sole, che si tiene come unità : M' massa del pianeta fornito di satellite :: $\frac{R^3}{T^2}$ cubo del raggio medio dell'orbita di un pianeta intorno al sole diviso pel quadrato della sua rivoluzione siderea : $\frac{r^3}{t^2}$ cubo del raggio medio dell'orbita del satellite diviso pel quadrato del tempo della sua rivoluzione si-

derea. Ma sopra di ogni altro è giunto La Place a calcolare le masse di pianeti, e di quelli in particolare che sono sforniti di satelliti, per mezzo delle perturbazioni che cagionano agli altri corpi celesti che gli avvicinano. Gli è venuto quindi fatto di stabilire, presa la massa del sole per unità, la massa di Mercurio $\frac{1}{2025810}$, quella di Venere $\frac{1}{356332}$, della Terra $\frac{1}{332086}$, di Marte $\frac{1}{2546320}$, di Giove $\frac{1}{1067{,}09}$, di Saturno $\frac{1}{3534{,}08}$, di Urano $\frac{1}{19504}$. D'onde è chiaro quanto sien piccole le masse dei pianeti in riguardo al sole, e quella della terra in particolare, mentre la massa solare non è che un punto nello spazio.

271. Si è parimente cercato di definire in alcun modo le masse dei satelliti. La Place per metodi ingegnosi ha stabilito la massa dei quattro satelliti di Giove in riguardo alla massa di Giove stesso, che considera come 1, per le seguenti frazioni, cioè a dire la massa

del primo . 0,0001733
del secondo 0,0002324
del terzo . . 0,0008850
del quarto. 0,0004266.

Finalmente si è determinata la massa della luna in rapporto a quella della terra per mezzo del fenomeno delle maree, come più innanzi si dirà, e si è ritrovata $\frac{1}{68{,}4}$ della massa terrestre (V. *Mecc. celeste*, t. III, p. 160). Anzi al presente Bessel e gli astronomi tedeschi dalla costante nutazione han ricavato la massa della luna $\frac{1}{88{,}4}$ di quella della terra (V. *Conoscenza dei tempi per l'anno* 1829, nell'addizione, nota di Mathieu, pag. 317).

272. Gli astronomi si sono sforzati di determinare, oltre alle masse, le densità relative dei pianeti. Ma come si sono partiti da due ipotesi, cioè a dire dalla perfetta sfericità e dalla omogeneità dei pianeti, le quali sono false ed incerte; così è chiaro che i rapporti delle loro densità non sono ben definite. Ciò non ostante per stabilire per approssimazione sì fatti rapporti, han consi-

derato che le densità dei corpi sono proporzionali alle masse divise per li volumi, e che i volumi nelle sfere per la geometria sono come i cubi dei raggi, ed han da ciò ricavato per regola generale che le densità dei pianeti sono come le loro masse divise per li cubi dei loro raggi. Anzi per evitare quanto si può gli errori, in luogo di supporre i pianeti omogenei, come prima faceasi, gli han supposto eterogenei, e han calcolato il rapporto tra le loro medie densità. Così posta per unità la densità della terra si è valutata

quella del sole . . . 0,23624
di Mercurio. 2,879646
di Venere, . 1,04701
di Marte . . 0,930736
di Giove . . 0,24119
di Saturno . 0,095684
di Uranio . . 0,020802.

273. Si è poi ricavato dalle osservazioni fatte da Bouguer e da Maskeline sull'attrazioni ch'esercitano le montagne nella direzione del filo a piombo (T. I, num. 20), la densità media della terra cinque volte di più di quella dell'acqua. Anzi dalle esperienze del Cavendish risulta 5,48 volte quella dell'acqua (V. *Trans. Filos. per l'anno* 1793). Finalmente la densità della luna, nell'ipotesi che la sua massa sia la sessantottesima di quella della terra, si reputa $5/7$ della media densità del nostro globo, o sia presa per unità quella della terra 0,715076.

274. Se le masse dei pianeti fossero state originariamente fluide e sottoposte al solo movimento di traslazione intorno al sole, in virtù della loro reciproca attrazione la loro figura e quella di tutti i loro strati sarebbe stata sferica, ed esse avrebbero esercitato la loro attrazione come se la massa di ciascuno fosse stata riunita nei rispettivi centri di gravità. Imperocchè una massa fluida, secondo che abbiamo dimostrato (T. I, num. 165), non può tenersi in equilibrio se la sua superficie di livello non si compone alla sfericità. E come sì fatta legge di equilibrio ha luogo non solo per la massa tutta dei pianeti, ma per ciascun loro strato; così di figura sferica dovrebbero essere i singoli strati e la massa intera dei pianeti. Nè il moto di traslazione potrebbe alterare

la loro figura; perciocchè tutte le molecole che formano la massa di un pianeta, movendosi con un moto comune e colla stessa velocità, non viene a mutarsi il loro sito, e il rapporto di posizione che hanno tra loro. Ma non è così, ove si pone mente che i pianeti, oltre del moto di traslazione, sono animati da quello di rotazione intorno ai proprj assi; poichè dal moto di rotazione deriva la forza centrifuga, la quale, come abbiamo accennato nel num. 224, eleva le colonne equatoriali dei pianeti, e comprime le polari, o sia muta la loro figura, di sferica in isferoidale. E veramente siccome la forza centrifuga è nulla al polo e va successivamente crescendo sino che giunge al *maximum* nell'equatore dei pianeti, pel n. 99; così è chiaro che va distruggendo successivamente una parte sempre più grande di forza centripeta o sia di gravità dal polo all'equatore dei pianeti. Oltredichè è da tenersi in considerazione che la gravità in una sfera opera sempre dal centro nella direzione del suo raggio, e che la forza centrifuga opera sempre nel senso del raggio del circolo che descrivono i varj punti della massa del pianeta rotante, e si dirizza dalla superficie al centro di questo circolo. Per lo che nell'equatore la forza centrifuga opera tutta e direttamente contro la gravità, a cagione che la gravità e la forza centrifuga operano in senso contrario per la direzione dello stesso raggio. Ma nei punti intermedj tra l'equatore e i poli la forza centrifuga opera obbliquamente contro la gravità, per la ragione che la gravità opera nel senso del raggio della sfera, e la forza centrifuga nel senso del raggio di un circolo paralello all'equatore; i quali due raggi partendosi l'uno dal centro della sfera, e l'altro dal centro del paralello, vanno a terminare allo stesso punto della superficie del pianeta, e formano perciò un angolo tra loro, il quale è eguale e corrisponde alla latitudine o sia alla distanza che passa tra l'equatore e il paralello. E come quest'angolo è diverso per ciascun paralello; così la forza centrifuga, operando più obbliquamente come cresce la latitudine, va distruggendo parti ineguali e sempre minori della gravità, come cresce la latitudine, o sia come dall'equatore ci avviciniamo ai poli del pianeta. Questa successiva diminuzione della gravità operata dalla forza centrifuga si suole esprimere dal *prodotto della forza centrifuga, che ha luogo nell'equatore del pianeta, pel quadrato del co-*

seno della latitudine. Per due ragioni adunque le colonne componenti la massa dei pianeti debbono essere di peso ineguale, e per l'energia della forza centrifuga decrescente dal loro equatore ai poli, e per la gravità che è distrutta dalla forza centrifuga in parti ineguali e sempre decrescenti dall'equatore al polo dei pianeti. Per lo che per tenersi in equilibrio tutta la massa dei pianeti le colonne equatoriali, come quelle che sono le meno pesanti, debbono essere più lunghe, e le polari, quelle che sono le più pesanti, debbono essere le più corte, come appunto succede l'equilibrio nei tubi comunicanti (T. I, num. 182); e le colonne intermedie debbono trovarsi successivamente più lunghe, come dai poli sono più vicino collocate all'equatore. E però considerandosi i pianeti dotati di un moto di rotazione, non possono essere sferici, ma di una figura sferoidale, la quale è più elevata all'equatore e compressa ai poli. Questa figura in fatti pigliano tutti i corpi molli che si mettono in giro intorno a sè stessi, come si può osservare per via di un pezzo di pasta o di creta, che si fa rotare intorno a un bastone a cui è infilzata; e questo stesso s'imita dai fisici per mezzo di una sfera composta di laminette o strisce pieghevoli e sottili di rame, la quale mettendosi in giro con rapidità cangia agli occhi nostri la figura sferica in ellisse.

275. Sebbene queste considerazioni generali sulla forza centrifuga che opera sopra i pianeti, i quali più o meno rapidamente rotano intorno a sè stessi, ci dimostrino di certo che la figura dei pianeti non sia sferica; pure non vagliono a indicarci con precisione quale sia la loro figura, e quanta l'elevazione all'equatore e la compressione ai poli. A indagarla è di necessità di rivolgerci prima d'ogni altro alla terra, affinchè da essa, ch'è sottoposta alle nostre ricerche e alle nostre osservazioni, possiamo argomentare quella degli altri corpi celesti, i quali si possono supporre sul fondamento dell'analogia simili in costituzione e in istruttura alla nostra terra.

276. I fisici astronomi hanno posto in opera due metodi per determinare la figura della terra: uno è tutto speculativo e matematico, perchè la ricava dalle leggi dell'attrazione; l'altro la riduce ad una ricerca di fatto, perchè la ritrae da due fenomeni, cioè a dire dalle misure diverse dei gradi del meridiano terrestre, e dalla

variazione della gravità ai poli e all'equatore. Molto si è travagliato e molto si è speculato così nell'uno come nell'altro metodo; ma ciò non ostante non si è potuto finora stabilire con esattezza la figura della terra; perciocchè la teorica spesso non è concorde colle osservazioni, e le misure di più gradi del meridiano terrestre certi ancora non ci rendono nel definirla.

Supposta la terra una massa fluida e omogenea, fornita di un moto di rotazione, le cui molecole si attirano reciprocamente al quadrato della distanza, si cercò da principio quale figura dovea pigliare la terra per tenersi in equilibrio. Questo problema fu sciolto giusta le leggi dell'idrostatica, e si tenne per fermo che in tale supposizione la sua figura dovea essere un'ellisse, e che la sua ellitticità o sia rapporto dei diametri della terra dovea essere come 229 sta a 230. Ma questa determinazione non fu d'accordo coll'aumento della gravità dall'equatore ai poli; e da ciò si ritrasse che la terra non è un fluido omogeneo, e il problema si propose sotto un'altra forma. Si suppose la terra come un nocciolo ricoperto dal mare, i cui strati van mancando di densità dal centro alla circonferenza, e in questa ipotesi si cercò quale figura le si conveniva in virtù delle leggi dell'attrazione per mantenersi in equilibrio. La teorica felicemente dimostrò in questo caso che la figura ellittica soddisfacea ancora all'equilibrio, purchè la superficie e i singoli strati della terra fossero tutti ellittici. Ma quel ch'è più, e reca più onore all'ingegno di Clairaut che si rese illustre per la soluzione di questo problema, furono i belli teoremi ch'egli il primo pose e stabilì. Imperocchè valse a dimostrare che l'ellitticità della terra è più piccola di quella che avrebbe luogo nel caso ch'essa fosse omogenea, e più grande di quella che avrebbe luogo nel caso che l'attrazione fosse diretta ad un sol punto, e non risultasse dalle singole molecole della terra, le quali tutte si attirano in ragione della massa, e reciprocamente al quadrato della distanza. Stabilì in secondo luogo che l'accrescimento totale della gravità dall'equatore ai poli è più grande di quello che sarebbe nel caso dell'omogeneità della terra, e più piccolo di quello che sarebbe nel caso che l'attrazione fosse diretta ad un sol punto. Determinò in fine che la somma dell'accrescimento della gravità e dell'ellitticità viene ad essere tutta eguale a $5/2$

del valore della forza centrifuga all'equatore. E come la forza centrifuga all'equatore calcolata (num. 99) è eguale a $\frac{1}{289}$ della gravità terrestre; così pigliando $5/2$ di $\frac{1}{289}$ la somma dell'ellitticità e dell'aumento della gravità, si ebbe $= \frac{1}{115,2}$. Fu facile dopo ciò di calcolare l'ellitticità della terra; perciocchè chiamando A l'aumento della gravità, ed E l'elletticità, sarà $A + E = \frac{1}{115,2}$, e sostituendo il valore di A, che secondo le osservazioni era 0,00567, risultò l'ellitticità della terra $E = \frac{1}{115,2}$ $- 0,00567$, o sia $= \frac{1}{332}$. Ma questa ellitticità, ricavata dalla teorica nell'ipotesi che la terra non fosse omogenea, non si accorda colle osservazioni, o sia colle misure di più gradi del meridiano terrestre. Imperocchè l'aumento successivo e totale dei raggi dai poli all'equatore, ai quali come archi appartengono i diversi gradi del meridiano terrestre, secondo che abbiamo accennato nel num. 243, ci danno un'ellitticità molto diversa dalla frazione $\frac{1}{332}$, la quale nasce dalla teorica; il che c'indica che la figura della terra non si appartenga ad unica ellisse, e sia molto complicata. Lungo sarebbe e forse oltre al nostro istituto il qui riferire e sviluppare tutte le speculazioni le più nobili di Alembert, di La Grange, di Legendre, e particolarmente di La Place, per stabilire le leggi delle attrazioni che esercitano le sferoidi tra loro, o sopra un punto situato al di dentro o al di fuori o alla loro superficie; e come sia venuto fatto a La Place coi metodi più ingegnosi dell'analisi algebrica di ricavare dalla dottrina dell'attrazione delle sferoidi la soluzione generale e diretta del problema della figura della terra, che si riduce a determinare la figura di una massa fluida in equilibrio, la quale è dotata di un moto di rotazione, e composta di un indefinito numero di fluidi di qualunque densità, le cui molecole tutte si attirano in ragion della massa, e reciprocamente al quadrato della distanza. Solamente giova qui di notare che secondo i principj di questi matematici, o sia giusta la teorica, la sferoide terrestre sarebbe ellittica, ed ellittici tutti i suoi

strati, e questi diminuir dovrebbero di densità, e crescere di ellitticità dal centro alla superficie. Ma sebbene una tale figura sia quella che ricercasi all'equilibrio, e possa soddisfare a più fenomeni e particolarmente all'aumento della gravità dall'equatore ai poli della terra, secondo che si osserva per mezzo del pendolo; pure non giunge a rappresentare con esattezza le variazioni dei gradi dei meridiani terrestri, i quali finora sono stati misurati.

277. Siccome confrontandosi le misure di più gradi situati in punti diversi e lontani non se ne ritraea la medesima ellitticità, e ora più e ora meno venia a risultare; però gli astronomi francesi han posto in paragone l'arco totale interposto a Dunkerque e Montjouy, il quale è stato misurato da Mechain e Delambre, coll'arco misurato al Perù da Bouguer, La Condamine e Godin, ch'è stato determinato con tutta la cura. E dalla comparazione di questi due archi, per mezzo di formole differenti, e nell'ipotesi che la terra fosse un'ellissoide di rivoluzione, hanno stabilito il semidiametro dell'equatore tese 3271864, quello del polo tese 3261265; il semidiametro del punto della terra a 45° di tese 3266611; la differenza dei primi due semidiametri tese 10599; e questa differenza divisa pel semidiametro dell'equatore ci ha indicato lo schiacciamento della terra, per la ragione che quanto essa è più o meno grande, l'ellissoide terrestre è più o meno schiacciata ai poli. Indi lo schiacciamento che ricavò Delambre dal valore di quei semidiametri, è stato espresso da $\frac{1}{308,65}$. E come una sì fatta quantità conviene coll'aumento della gravità osservato per mezzo del pendolo e con altri fenomeni; così al presente è abbracciata dagli astronomi francesi, e sopra questa han calcolato il quarto del meridiano terrestre, la cui diecimilionesima parte forma il *metro*, o sia l'unità delle loro misure.

278. Dopo le quali cose tutte par che si possa conchiudere di certo che la figura della terra non contrasta le leggi dell'attrazione, e che sia una sferoide schiacciata ai poli e rialzata all'equatore. Di modo che si può essa considerare come un'ellissoide di rivoluzione intorno al suo piccolo asse, ch'è quello dei poli (Ved. La Place, *Méc. cél.* tomo II). Ma come la differenza tra il grado

al polo e quello all'equatore è piccola, perchè quello è più grande di questo di una 308ª parte della sua lunghezza; così è da dirsi che l'ellisse terrestre è poco differente da un cerchio. Ciò non pertanto si è sinora misurata la figura della terra nel senso dei meridiani, e per meglio conoscerla sarebbe da studiarsi nel senso dei paralelli. Arago avea cominciato già questa operazione sul paralello all'estremità australe della meridiana di Parigi; ma si attende, per coglierne dei sodi risultamenti, che si mandi ad effetto, come si desidera, la misura di un grand'arco del paralello tra Brest e Strasbourg.

279. Conosciute in fine, per quanto meglio si può, le dimensioni della nostra terra, corre alla mente di tutti che i monti più alti sieno da riguardarsi non altrimenti che delle insensibili asprezze o delle ineguaglianze piccolissime rispetto alla grandezza del globo. Il picco di Himalaya al Thibet, ch'è il più alto monte della terra, non ha che 4013 tese di elevazione perpendicolare; ed intanto ove ci piaccia di raffigurare la terra per un globo di 8 piedi di raggio, questo monte si potrebbe appena rappresentare per un'asprezza di mezza linea. Tanto sono rare ed insensibili le irregolarità della superficie della terra in riguardo alle sue dimensioni! Questa superficie risulta di 25790440 leghe quadrate, di cui almeno tre quarte parti sono coverte dal mare, e al più la metà del resto, che giunge quasi a tre milioni di leghe quadrate, trovasi abitata (V. Biot, *Astr. Fis.* tomo I, lib. 1, cap. 12).

280. La teorica nel determinare la figura della terra ha creduto di stabilire quella di tutti i corpi celesti; perciocchè supponendo per analogia che questi, come la terra, sieno formati di un nocciolo coperto di un fluido, ne ha conchiuso ch'essi han dovuto pigliare una figura ellittica al par della terra. Di fatto la teorica ha posto che la figura ellittica è quella che si conviene a una massa fluida fornita di un moto di rotazione, e composta di fluidi di densità qualunque, le cui molecole si attirano reciprocamente al quadrato della distanza, e che i limiti della compressione dell'ellissoide sono compresi tra $5/4$ e $1/2$ del rapporto della forza centrifuga alla gravità che ha luogo nell'equatore, avverandosi il primo limite nel caso che la massa fosse omogenea, e il secondo nel caso che gli strati vicino al centro fossero infinitamente

densi. Dopo che è venuta applicando questa determinazione al pianeta Giove, che comparisce sensibilmente schiacciato ai suoi poli, ed ha stabilito la sua ellitticità tra $5/4$ e $1/2$ del rapporto della sua forza centrifuga alla gravità nel suo equatore. E come la forza centrifuga di questo pianeta è quasi $1/9$ della gravità al suo equatore; così in virtù del primo limite la sua ellitticità sarebbe $5/4$ di $1/9$, o sia $\frac{5}{36}$. In riguardo poi al secondo limite, che viene ad essere $1/2$ di $1/9$, ne risulta un'ellitticità eguale a $\frac{1}{18}$; di modo che l'ellitticità reale di Giove deve essere compresa tra $\frac{5}{36}$ e $\frac{1}{18}$, come di fatti è, attesochè secondo le osservazioni il rapporto dei diametri di Giove (num. 156) è :: 13 : 14, o sia $= \frac{1}{13}$. Anzi siccome il limite $\frac{5}{35}$ può aver solamente luogo nel caso di una massa omogenea; perciò si è argomentato che Giove sia formato di strati eterogenei. Per lo che la teorica in forza dei suoi calcoli è arrivata ad avvicinarsi quanto più si può a stabilire la figura di tutti i corpi celesti con un metodo unico e generale. Che se non ha potuto finora determinarla con precisione, ciò è da attribuirsi alla varia e irregolare struttura di tali corpi, dei quali non sappiamo l'interna costituzione.

281. Potrà ora osservarsi come il moto della terra e la disposizione del nostro sistema, la quale piacque a Copernico (num. 218), sia sodamente confermata e condotta ad evidenza dal principio dell'attrazione. Se le masse dei pianeti e quella della terra sono da riguardarsi come tante piccolissime frazioni in riguardo alla massa del sole (num. 270), e se l'attrazione, la quale è inerente a ciascuna molecola della materia (num. 263), segue e risulta dalla massa, o, come dicesi, è in proporzione della massa; non ci è più dubbio che la massa solare, come quella ch'è fornita di un potere più energico, che le altre non hanno, debba signoreggiare tutti i corpi del nostro sistema e la nostra terra, mettendoli tutti in movimento e in giro intorno a sè ove si considerano i moti relativi, o intorno al comun centro di gravità ove si ha riguardo ai moti assoluti. Posta adunque l'attrazione come

causa di moto, la terra non può restare in riposo, e dee per necessità girare in un'orbita ellittica e quasi circolare, perchè l'attrazione opera in ragione inversa del quadrato della distanza.

282. La forza di attrazione, come quella che imprime ai pianeti una tendenza intorno ad un punto, ch'è il centro del loro movimento (num. 257), non è altro che una forza centrale. E siccome giusta gl'insegnamenti della dinamica non può aver luogo il moto curvilineo, e per una trajettoria (n. 110) in virtù della sola forza centrale; così è chiaro che i pianeti per muoversi, come di fatti si muovono, debbono essere sospinti da qualche altra forza, che congiunta con quella di attrazione produce i due movimenti loro di rivoluzione e di rotazione. Alcuni, per ispiegare questi due moti e tutte le circostanze che l'accompagnano, suppongono con Buffon che una cometa piombando sul sole abbia distaccato un torrente di materia, da cui sonosi formati molti globi più o meno grandi, più o meno lontani dal sole, i quali raffreddandosi son diventati opachi e solidi, e chiamansi da noi pianeti e satelliti. Ma sebbene una tale supposizione, unendo all'attrazione solare la forza d'impulso, giunga a spiegare il moto di traslazione dei pianeti, e come si muovono presso a poco nel piano che passa pel centro del sole; pure non ci dà a comprendere perchè le loro orbite sieno poco eccentriche e quasi circolari. Imperocchè i pianeti girando intorno al sole nel ritornare al perielio dovrebbero secondo le leggi del moto ellittico (num. 112) radere, o almeno passare molto da vicino alla superficie del sole, da cui sono stati svelti, e descrivere così orbite molto eccentriche e assai lontane dalle circolari; la quale circostanza sola, volendone trascurar tante altre, come contraria all'osservazione, basta a indicarci quanto l'ipotesi di Buffon sia disadatta a far ragione dei movimenti de' corpi celesti. Altri poi si danno a credere che il sole da principio era fornito di un'immensa atmosfera, la quale successivamente e a poco a poco si è ristretta a cagione del raffreddamento ai confini in cui attualmente si trova. La figura di questa atmosfera dovea essere come tuttora è quella di una sferoide elevata all'equatore e schiacciata ai poli; perchè girando il sole intorno a sè stesso, con esso girava ancora la sua atmosfera, e questa in virtù della rotazione

dovea conformarsi a una tale figura. Il confine di questa atmosfera è giusto in quel punto in cui l'attrazione si equilibra colla forza centrifuga; perchè se fosse oltre a questo termine, il fluido sarebbe dissipato dalla forza centrifuga, e perciò si trova nel piano del suo equatore. Ma come si va raffreddando e condensando essa atmosfera sulla superficie del sole, cresce la celerità con cui rota la massa solare colla sua atmosfera, e il confine di questa si avvicina al centro di gravità del sole, e più d'ogni altro si distacca e resta separata una zona fluida, quella appunto che si trova nel limite e nel piano dell'equatore dell'atmosfera. Questa zona fluida disgiunta dall' atmosfera solare continua a circolare intorno al sole in virtù della forza centrifuga eguale alla centripeta, e condensandosi sempre più e sempre girando intorno al sole forma un pianeta. Che se una tale zona ha pure un'atmosfera la quale si va condensando, ne risultano uno o più satelliti che girano intorno a un pianeta. E così successivamente e di mano in mano restringendosi i confini dell'atmosfera solare, si ha l'origine dei pianeti, che si muovono in orbite quasi circolari a diverse distanze dal sole, e ne nascono dei pianeti forniti di satelliti, i quali pure girano in orbite quasi circolari. E perchè anche questa è una pura supposizione, cercano di rassodarla per mezzo degli anelli di Saturno, i quali si possono considerare come tante zone fluide abbandonate successivamente dall'atmosfera di Saturno. Ma sebbene una sì fatta ipotesi possa bene spiegare i moti dei corpi celesti: pure come rimonta all'origine del sistema planetario, intorno a cui non abbiamo fatti per giudicarne; così niente possiamo sodamente affermare, e la tenghiamo nel numero delle ipotesi che si partono e nascono dalla umana immaginazione. Solamente possiamo stabilire, che non bastando a far ragione dei moti celesti la sola attrazione, si debba ammettere una forza d'impulso, e considerare così secondo la nostra maniera di vedere i pianeti e i satelliti come tanti projetti, i quali sono posti in giro dall'attrazione. Ed ove si voglia credere che un tale impulso, impresso da prima ai pianeti, non passò pel rispettivo centro di loro gravità, chiaro si comprende, pel n. 267 del T. I, come i pianeti e i satelliti fossero stati nello stesso tempo animati da un moto di rivoluzione e di rotazione. A spiegar dunque

questi due moti la dinamica suppone e ricerca due forze le quali unitamente e nel medesimo tempo operano sopra ciascun corpo celeste. L'una è una forza continua e centrale, che varia la sua energia reciprocamente al quadrato della distanza, e questa si è trovata per buona ventura nell'attrazione, la quale è inerente a ciascuna particella della materia. L'altra è una forza uniforme e costante e impressa ai corpi celesti a traverso di un punto che non è il loro centro di gravità; ma una tale forza non sappiamo quando e come e in qual modo gli abbia sospinto, e per quale disposizione di cose abbia avuto luogo nell'origine del sistema planetario, o dopo la formazione dell'universo. E però ci restiamo là dove si restano al presente le nostre cognizioni, bastandoci di additare in generale le cause dei moti celesti senza più.

CAPO III.

DELLE TURBAZIONI CAGIONATE AI MOTI DEI CORPI CELESTI DALLA LORO MUTUA ATTRAZIONE.

283. Considerando i pianeti o i loro satelliti, siccome noi finora abbiamo fatto, per quelli che ubbidiscono alle sole forze principali che li animano, quali sono la forza del sole in riguardo ai pianeti, o quella dei pianeti primarj rispetto alle loro lune, ci è venuto fatto di ricavare le leggi che si appartengono al moto ellittico dei corpi celesti, e più d'ogni altro di ritrovare le leggi a norma di cui opera costantemente la causa fisica dei loro movimenti, ch'è l'attrazione. Ma questa considerazione non è esatta, nè sola basta a spiegare con precisione tutti i singoli loro moti. Imperocchè essendo l'attrazione inerente a ciascuna particella della materia, ne segue che il nostro sistema solare è un sistema di corpi che tutti vicendevolmente si attraggono, e che il moto di uno di essi è composto, o quasi risultante dalla energia e direzione delle forze attrattive di tutti gli altri. Sebbene la luna sia stata da noi riguardata per un corpo che è sospinto principalmente dalla terra; pure è essa sottoposta all'azione del sole, o di altri pianeti che secondo la loro posizione più o meno l'attirano, e fan sì che resti turbata nell'eseguire il moto impressole dalla

terra. Nella stessa guisa Giove e i suoi satelliti sono ora più e ora meno perturbati giusta le varie loro situazioni da questo o da quell'altro corpo celeste. Il perchè alla considerazione delle forze principali è di necessità che si aggiunga quella delle forze perturbanti, le quali sono pure forze attrattive. Sotto questo nuovo punto di vista la stessa causa, qual è l'attrazione, nell'atto che obbliga un corpo a descrivere un'ellisse, lo distrae da questa curva; o pure nel mentre che ne accelera la velocità, in parte la ritarda in modo che tutte le variazioni che si osservano nei pianeti, o nei loro satelliti, in luogo di rovesciare l'attrazione, gli han confermato, e sono un effetto dell'attrazione medesima.

Di queste ineguaglianze, alcune si dicono *periodiche*, perchè dipendono dalla mutua situazione dei pianeti e ritornano come la stessa posizione ritorna; ed altre si chiamano *secolari*, perchè han luogo negli elementi del moto ellittico, che variano con lentezza tale che il loro periodo si estende a molte migliaja di anni; ma così l'une come l'altre derivano dalla mutua attrazione dei pianeti. Si ha un esempio di tali perturbazioni nei movimenti della luna, che dipendono dall'azione reciproca ch'esercitano tra il sole, la luna e la terra; giacchè tutti gli altri astri possono essere trascurati o per la loro massa ch'è piccola, o pure perchè sono lontani. Indi è che un sì fatto problema, che è stato famoso per la sua difficoltà, si conosce sotto il nome di problema de' tre corpi. Cominciando adunque dalle ineguaglianze della luna, si consideri il sole situato in S (*fig.* 46), la terra in E, e la luna, la quale si volge per la sua orbita $CBDA$, posta giusto nella quadratura in A. In tal caso le forze attrattive che sviluppa il sole sopra E e sopra A, sono per poco eguali, per la ragione che sono quasi eguali le loro distanze AS, ES. Ora tirandosi AL paralella ad ES, e LS paralella ad EA, la forza di attrazione del sole sopra la luna o sia AS è la diagonale del paralellogrammo $AESL$, e come tale si può risolvere nelle due forze AL e AE. E siccome AL è paralella ed eguale ad ES, o sia all'attrazione del sole sopra la terra; così in virtù di queste due forze la terra e la luna sono egualmente attirate, e i loro moti relativi non sono alterati. La forza dunque che turba il moto della luna è rappresentata da AE, la quale cospira coll'attrazione ch'esercita la

terra sopra la luna, perchè è diretta nel medesimo senso del raggio *AE*; e l'attrazione del sole in questo caso congiungendosi con quella della terra, obbliga la luna a cadere più sotto della tangente alla sua orbita, e rende la sua orbita più curva in *A*, che non sarebbe se non avesse luogo la forza perturbante del sole. Nello stesso modo si avvera che stando la terra nell'altra quadratura in *B*, l'azione del sole sulla luna, scomposta secondo il raggio *BE* dell'orbita lunare, tende ad aumentare la gravità della luna verso la terra. Per lo che si può generalmente conchiudere che *nelle quadrature e vicino alle medesime in virtù dell'azione del sole sulla luna si aumenta la gravità della luna verso la terra*, e per cagione di un sì fatto accrescimento l'orbita della luna si altera diventando più curva, aumentando la curvatura dell'ellisse che naturalmente dovrebbe descrivere per l'azione sola della forza attraente della terra.

284. Se la luna si considera situata nella sua congiunzione in *C*, allora siccome la luna è più vicina al sole che non è la terra; così prova un'azione più forte dalla parte del sole, e la forza perturbante è rappresentata dalla differenza delle due forze attrattive ch'esercita il sole sulla terra o sulla luna. Oltre di che operando la forza perturbante del sole sopra la luna in *C* in direzione opposta a quella di *C* in *E*, giusta cui la terra attira la luna; ne segue che la gravità della luna verso la terra si diminuisce nella congiunzione, e per una sì fatta cagione essa viene a cadere meno sotto la tangente della sua orbita, e a cangiare la forma della sua rivoluzione. Il medesimo effetto par che abbia luogo quando la luna si trova nella sua opposizione in *D*. Poichè la luna è attratta più debolmente della terra, come quella ch'è più lontana dal sole, che non è la terra, e la differenza tra le due attrazioni del sole sulla terra e sulla luna rappresenta la forza solare perturbante. Questa differenza si può considerare quasi per eguale a quella che ha luogo nelle congiunzioni per ragione della gran distanza in cui si trova il sole dalla luna, sia ch'essa fosse nelle opposizioni o nelle congiunzioni, e tende pure come nelle congiunzioni a diminuire la gravità della luna. Laonde si può stabilire che *la gravità della luna verso la terra decresce e viene meno nella opposizione e nella congiunzione*, e la sua orbita si rende meno curva.

285. Sia finalmente la luna in M, ch'è un punto frapposto alla congiunzione C e alla quadratura B: in tale caso siccome ES rappresenta la direzione della solare attrazione sopra la terra, e MS quella dell'azione del sole sopra la luna; così ad esprimerne le loro quantità si protragga MS in G in sì fatto modo che $MG : ES :: ES^2$ quadrato della distanza della terra dal sole : MS^2 quadrato della distanza della luna dal sole; o sia MG verrà a rappresentare la gravità della luna verso il sole, e ES quella della terra verso il sole. Ciò posto, si compia il paralellogrammo $HMFG$ guidando MF paralella ed eguale ad ES, e MH paralella ed eguale a FG che unisce i punti F e G; e dopo aver descritto questo paralellogrammo, si risolva la forza MG in MF e in MH. Di queste due forze siccome quella ch'è rappresentata da MF non può alterare i movimenti della luna, perchè è eguale e paralella ad ES ch'esprime l'azione del sole sopra la terra; così la sola MH può rappresentare e misurare la forza perturbante. Ora MH può operare non solo sulla gravità della luna verso la terra, ma anche sulla velocità della luna. Imperochè guidando MK tangente a M, e HI paralella a MK, e conducendo poi MI giusta la direzione di EM, e finalmente KH paralella a MI, ne risulta il paralellogrammo $MKHI$, per cui la forza perturbante MH si può sciogliere nelle due componenti MK, MI, delle quali la prima, come quella che opera nella direzione della tangente (num. 82), accresce la velocità della luna; e la seconda, come quella ch'esercita la sua azione in senso contrario alla direzione ME della gravità della luna verso la terra, viene a diminuire una sì fatta gravità. Ciò posto, tre casi possono aver luogo: o la forza perturbante MH coincide colla tangente MK, o pure cade dentro o fuori la tangente MK. Se cade sulla tangente, come avviene quando la luna si trova a 35° 16′ distante dalla quadratura, allora la forza MI svanisce, perchè MH non si scioglie nelle due componenti, e la forza perturbante niente opera sulla gravità. Ma come MK è diretta sempre verso qualche punto della linea, la quale passa per li centri di E e di S; così viene ad accrescere la velocità della luna, ove questa si avvicina alla congiunzione, perchè il moto della luna cospira colla direzione di MK, e al contrario ri-

tarda la velocità della luna ove questa si allontana dalla congiunzione per andare alla quadratura, perchè allora MK si oppone alla direzione del moto lunare. Nel secondo caso in cui MH cade dentro della tangente, o sia tra la quadratura e 35° 16′ da essa, allora MI in luogo di essere in senso contrario di ME, cade sopra ME, ed è diretta verso E, per cui si accresce la gravità della luna, e l'altra forza MK ora accresce e ora ritarda la velocità. Nel terzo caso finalmente, in cui la luna si trova lontana dalla quadratura più di 35° 16′, allora, nel modo che sopra abbiamo dimostrato, la forza perturbante in parte diminuisce per MI la gravità della luna, e per MK ne varia la velocità.

Queste variazioni nella gravità e nella velocità della luna, che hanno luogo tra le quadrature e la congiunzione, debbono in circostanze simili, pel num. 284, succedere ancora tra le quadrature e l'opposizione.

286. Sinora abbiamo dimostrato in generale che la velocità e la gravità della luna ora si accresce e ora si diminuisce per cagione della forza perturbante; ma non si è calcolata la quantità di essa forza, nè si è stabilito se dopo tutte le vicende a cui è sottoposta la luna nella sua orbita, ne risulti un aumento o una diminuzione di gravità o di velocità. A ciò fare, sia la distanza della luna dalla terra $= r$, quella della luna dal sole $= d$, e la distanza della terra dal sole $= D$, e si chiami M la massa solare. Non vi ha dubbio, pel num. 263, che la forza attrattiva del sole sulla luna è rappresentata da $\frac{M}{d^2}$; e siccome questa è espressa da AS (*fig.* 46), così sciogliendosi nelle due componenti AL e AE, sarà $AL\ (d) : AE\ (r) :: \frac{M}{d^2} : \frac{Mr}{d^3}$. La forza adunque che spinge A verso E nella direzione $AE = \frac{Mr}{d^3}$. Nel modo stesso $AS\ (d) : ES = AL\ (D) :: \frac{M}{d^2} : \frac{MD}{d^3}$; e però la forza con cui il sole trae la luna verso S per la direzione $ES = \frac{MD}{d^3}$. E perchè la forza perturbante risulta dalla differenza delle due forze attrattive del sole sopra la luna e sopra la terra; così posta, pel num. 283, la forza attrattiva

di S sopra $E = \frac{M}{D^2}$, sarà la forza perturbante $= \frac{MD}{d^3} - \frac{M}{D^2}$, e questa opera nella direzione stessa di ES.

287. Ora se in luogo di considerare la luna in A, si voglia riguardare situata in M; allora la forza perturbante $\frac{MD}{d^3} - \frac{M}{D^2}$ sarà, pel num. 285, $= MH$, e questa si può sciogliere nelle due componenti MI, MK. E per ottenere il valore di queste due quantità si supponga noto l'angolo $HMI = a$; di che segue la proporzione 1 : sen a :: MH : IH, o sia $IH = \left(\frac{MD}{d^3} - \frac{M}{D^2}\right)$ sen a. E siccome MK, pel num. 285, esprime la forza che ritarda la velocità della luna; così chiamando R questa forza ritardante, sarà $R = \left(\frac{MD}{D^3} - \frac{M}{D^2}\right)$ sen a. In quanto poi all'espressione di MI si ha 1 : cos a :: $MH = \frac{MD}{d^3} - \frac{M}{D^2}$: $IM = \left(\frac{MD}{d^3} - \frac{M}{D^2}\right)$ cos $a =$ alla forza che tende ad allontanare M da E lungo il raggio vettore EM. Ma questi sono gli effetti delle perturbazioni che han luogo nella direzione di ES; e oltre a questi, ci hanno quei nella direzione di EM, com'è chiaro osservando MS, che si può risolvere in ES e in EM. E però fatta la forza per EM, pel numero antecedente, $= \frac{Mr}{d^3}$, si avrà per la forza vera che allontana M da E, o sia che cangia il raggio vettore di M, $F = \frac{Mr}{d^3} - \left(\frac{MD}{d^3} - \frac{M}{D^2}\right)$ cos a.

288. Poste le quali cose, si concepisca guidata una perpendicolare Mc sopra il raggio EC, e l'angolo SEM eguale all'angolo a. In tale supposizione Ec si può esprimere per r cos a; perchè nel triangolo cEM, 1 : cos a :: $EM = r$: Ec, e la distanza della luna dal sole (d), o sia cS, sarà $= ES - Ec = D - r$ cos a. Volendo adunque il valore di $\frac{1}{d^3}$ sarà $(D - r \cos a) - 3 = \frac{1}{D^3} + \frac{3r \cos a}{D^4}$, perchè tutti gli altri termini, che seguono nella potenza -3, si possono trascurare senza un errore sensibile. Sostituendo adunque questo valore nella for-

mola già ritrovata, si avrà $\frac{MD\,\mathrm{sen}\,a}{D^3} + \frac{3MDr\,\mathrm{sen}\,a\cos a}{D^4}$ $- \frac{M\,\mathrm{sen}\,a}{D^2}$, e dopo le convenienti operazioni algebriche segnata col segno — la forza risultante $R = \frac{3Mr\,\mathrm{sen}\,a\cos a}{D^3}$. E perchè $\mathrm{sen}\,a \cos a = \frac{\mathrm{sen}\,2a}{2}$, sarà $R = - \frac{3Mr\,\mathrm{sen}\,2a}{2D^3}$. Nell'altra formola poi fatta la sostituzione si avrà $F = \frac{Mr}{D^3} + \frac{3Mr^2\cos a}{D^4} - \frac{MD\cos a}{D^3} - \frac{3MDr\cos^2 a}{D^4} + \frac{M\cos a}{D^2}$. E come di questi termini due si elidono, e l'altro $\frac{3Mr^2\cos a}{D^4}$ si trascura, per la ragione che D è almeno 400 volte più grande di r; così restano $\frac{Mr}{D^3} - \frac{3Mr\cos^2 a}{D^3}$, ove essendo $\cos 2a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2a$, risulta $F = - \frac{Mr}{2D^3} - \frac{3Mr\cos 2a}{2D^3}$.

289. Si vede dalla sola inspezione delle formole che il valore di R e di F dipende dall'angolo a, o sia dal luogo in cui si trova la luna nella sua orbita. In fatti posto l'angolo $a = 0$, o pure $= 90^\circ = 180^\circ = 270^\circ$, ne risulta il valore di $R = 0$; perchè $\mathrm{sen}\,2a$ è sempre zero. E come quando la luna si trova a 0° è nella congiunzione, e a 180° è nella opposizione, e quando è situata a 90° e a 270° stassi nelle quadrature; così è da conchiudersi che la *velocità ordinaria della luna non è alterata dalla forza perturbante del sole nelle quadrature e nelle sizigie* nel modo che da noi si era indicato nei n. 283 e 284. Se poi l'angolo a fosse $= 45^\circ = 225^\circ$, o sia se la luna fosse nel primo e terzo ottante; allora siccome il $\mathrm{sen}\,2a = 90^\circ = 450^\circ$ risulta $= 1$, perciò ne segue che $R = \frac{3Mr}{D^3}$, o sia *nel primo e terzo ottante la velocità della luna è sottoposta al* maximum *di ritardamento*. Ma nel secondo e quarto ottante, cioè a dire quando $a = 135^\circ = 315^\circ$, perchè il $\mathrm{sen}\,2a$ viene ad essere $= - 1$, ne segue che $R = \frac{3Mr}{D^3}$, o sia la *velocità della luna nel secondo e quarto ottante accrescendosi giunge al* maximum *di accrescimento*.

290. Per determinare le vicende cui è soggetto il valore di F, sia $a = 0^\circ$ $a = 180^\circ$, per cui il $\cos 2a$ della formula risulta $= 1$. Allora $F = -\frac{Mr}{2D^3} - \frac{3Mr}{2D^3} = -\frac{4Mr}{2D^3} = -\frac{2Mr}{D^3}$, o sia *nelle sigizie la gravità della luna verso la terra ha il* maximum *di diminuzione, la quale è espressa dal doppio prodotto della massa solare pel quoziente del raggio dell' orbita lunare diviso pel cubo della distanza del sole dalla terra.* O pure se $a = 90^\circ$ $= 270^\circ$ per cui il $\cos 2a$ viene ad essere $= -1$; allora $F = -\frac{Mr}{2D^3} + \frac{3Mr}{2D^3} = \frac{2Mr}{2D^3} = \frac{Mr}{D^3}$, o sia *nelle quadrature la gravità della luna verso la terra giunge al* maximum *di aumento, e questo è rappresentato dal prodotto della massa solare pel quoziente del raggio dell' orbita lunare diviso pel cubo della distanza del sole dalla terra.*

291. Da questi valori di F è chiaro che nelle quadrature l'attrazione solare scomposta giusto il raggio dell'orbita lunare opera nella luna un aumento di gravità verso la terra, il quale è una metà della diminuzione che le cagiona nelle sizigie; perciocchè $\frac{2Mr}{D^3}$ è doppio di $\frac{Mr}{D^3}$. Inoltre dalle azioni del sole sopra la luna, mentre questa compie la rivoluzione sinodica, risulta una forza media diretta nel senso del raggio vettore lunare, che diminuisce la gravità di questo satellite, ch'è eguale alla metà del prodotto della massa solare pel quoziente del raggio dell'orbita lunare diviso pel cubo della distanza del sole dalla terra. In fatti sommando $-\frac{2Mr}{D^3}$ $+\frac{Mr}{D^3}$ ne viene $-\frac{Mr}{D^3}$, la cui metà $= \frac{M}{2} \times \frac{r}{D^3}$. Questo prodotto poi $\frac{Mr}{D^3}$ sta alla gravità della luna come il quadrato del tempo della rivoluzione siderea della luna sta al quadrato del tempo della rivoluzione siderea della terra. In fatti esprimendo per m la massa della terra, per m' quella della luna, e per M la massa solare, e chiamando d e D le rispettive distanze della luna e del sole dalla terra, sarà la gravità che ritiene la luna $= \frac{m+m'}{d^2}$

e quella che mantiene la terra nella sua orbita $= \frac{M}{D^2}$. E siccome pel n. 98 $\frac{m \times m'}{d^2} : \frac{M}{D^2} :: \frac{r}{t^2} : \frac{R}{T^2}$; così essendo il prodotto $\frac{Mr}{D^3} = \frac{M \times r}{D^2 \times D} = \frac{R}{T^2} \times \frac{r}{R} = \frac{r}{T^2}$, ne segue che $\frac{Mr}{D^3} : \frac{m+m'}{d^2} :: \frac{r}{T^2} : \frac{r}{t^2} :: t^2 : T^2$; o sia quel prodotto è alla gravità lunare come il quadrato del tempo della rivoluzione siderea della luna è al quadrato del tempo della rivoluzione siderea della terra. Ora il rapporto di questi due quadrati è quasi come 1 a 179, di modo che il prodotto $\frac{Mr}{D^3}$ è $\frac{1}{179}$ della gravità lunare, e la forza media che diminuisce la gravità della luna, come quella ch' è $\frac{Mr}{2D^3}$, si deve valutare per $\frac{1}{358}$. E però la gravità della luna in virtù dell'azione media del sole è diminuita di $\frac{1^{ma}}{358}$ parte. Finalmente la luna sarà portata in virtù di una tale diminuzione della sua gravità più distante dalla terra, che non sarebbe se fosse abbandonata all'intera sua gravità. E come questa diminuzione della gravità accade nel senso del raggio vettore (num. 282); così questo raggio sarà aumentato della sua 358^{ma} parte, per cui il moto angolare della luna viene a diminuirsi, e questa diminuzione, secondo La Place, si calcola di $\frac{1^{ma}}{179}$ parte.

292. Si può ora comprendere la causa di quel perturbamento nel moto della luna che si chiama *variazione* (num. 167), e parimente si spiega quella ineguaglianza che porta il nome di *equazione annua*. Imperocchè dalle formole stabilite nei numeri antecedenti ben si raccoglie che le variazioni della luna dipendono dalla distanza del sole dalla terra, e sono nella ragione inversa dei cubi delle distanze del sole dalla terra $= \frac{1}{D^3}$. Per lo che l'azione del sole sopra la luna è più o meno forte secondo che il sole si trova nel perigeo o nell'apogeo, o sia che l'orbita della luna si dilata o si restringe secondo che la terra si avvicina o si allontana dal sole (num. 123); e che il moto della luna si ritarda quando il sole è nel

perigeo, e al contrario si accelera quando il sole si trova nell'apogeo. Ora essendo la distanza del sole nel perigeo $\frac{1}{60}$ più piccola che non è la sua distanza media, ne segue cha la sua velocità di rotazione, o, come dicesi, angolare, è aumentata di $\frac{1}{30}$. Al contrario per una sì fatta diminuita distanza del sole nel perigeo la velocità angolare della luna sarà diminuita di $\frac{1}{20}$ di più. E siccome la media diminuzione cagionata dal sole nel moto lunare si computa (num. 291) di $\frac{1}{179}$; così ne risulta nel perigeo una diminuzione eguale alla 3580ma parte del moto lunare; perciocchè $20 \times 179 = 3580$. E però l'aumento di velocità del sole nel perigeo sta alla diminuzione che cagiona nella luna come $\frac{1}{30}$ del moto solare sta $\frac{1}{3580}$ del moto lunare.

293. Si vede parimente che la linea degli apsidi della luna, pel num. 115, dovrebbe tenersi immobile e stazionaria, perchè è sospinta da una forza centrale che opera nella ragione inversa dei quadrati delle distanze. Ma siccome alla gravità che porta la luna verso la terra si aggiunge la forza che si parte dal sole (num. 283), la quale alcuna volta accresce e alcuna volta diminuisce la gravità; così ne segue che la linea degli apsidi in luogo di essere immobile si rivolge e si muove. Quando la luna si trova nelle quadrature, la forza solare (n. 290) accresce la forza gravità della luna, e per un sì fatto aumento opera nella ragione inversa ch'è minore del quadrato della distanza. Indi è che, pel num. 115, la linea degli apsidi si deve muovere con un moto retrogrado o sia verso i segni antecedenti. Se poi la luna si trova nella congiunzione o nella opposizione, allora la forza solare, pel num. 290, opera in senso contrario della gravità che anima la luna, e perciò la forza gravità viene a seguire una ragione ch'è maggiore dell'inversa dei quadrati delle distanze. La linea quindi degli apsidi, giusta il num. 115, si dee muovere secondo l'ordine dei segni, o sia con un moto diretto e progressivo. E siccome, pel num. 290, la gravità, che toglie l'azione

del sole nella congiunzione e opposizione, è maggiore di quella che aggiunge nelle quadrature; perciò il moto diretto della linea degli apsidi supera il retrogrado, e la linea degli apsidi in ciascuna rivoluzione della luna si trova avanzata nell'ordine dei segni. L'apogeo in fatti della luna ha un moto per cui compie una rivoluzione siderea in 6793 giorni 7 ore e 39",7, e una rivoluzione tropica in 3231 giorni 8 ore 34' 57",6. Tanto egli è vero che il moto della linea degli apsidi in luogo di rovesciare l'attrazione, al contrario la stabilisce e conferma.

294. Non solo la linea degli apsidi, ma anche quella dei nodi si muove. Poichè rappresentando *COQN* l'ecclittica (*fig.* 50) e *MOPN* l'orbita della luna inclinata di cinque gradi in circa al piano dell'ecclittica, i punti d'intersecazione *O* e *N* saranno i nodi della luna, e questi si mettono in movimento. Basta a comprender ciò, che si ponga mente alla forza perturbante *MH* (*fig.* 46), la quale essendo obbliqua all'orbita lunare, è da scomporsi in tre (tomo I, num. 54). Per lo che a parte della forza tangenziale *MK* che altera la velocità, e l'altra *IM* che cangia la gravità della luna verso la terra, è da ammettersi una terza perpendicolare alle prime due, ch'è destinata a sospingere la luna verso l'ecclittica, e produce l'effetto di abbassare l'orbita lunare sopra questo piano. Di modo che questa forza è nulla quando la luna è nelle quadrature e nei nodi, perchè *MH* è paralella all'ecclittica, o pure si trova nel medesimo piano dell'ecclittica. Non così avviene quando la luna è negli altri punti della sua orbita, per la ragione che quella terza forza opera il movimento dei nodi, e cangia l'inclinazione dell'orbita della luna. Si può veder ciò chiaramente riguardando alla *fig.* 49, in cui *EN* rappresenta l'ecclittica, *ON* l'orbita della luna, *N* il nodo, e 'l sole situato nel piano *NE* tende ad attirare la luna, o sia a farla discendere. In tal caso stando la luna in *L* tende a progredire verso *a*; ma come nel medesimo tempo è sospinta dal sole lateralmente per *Lb*; così imprende il suo cammino o la sua orbita per *Lc*, e 'l nodo si trasporta da *N* in *N'*, e la direzione *LN'* dell'orbita fa l'angolo *LN'E* più grande di quello di *N*. Questo stesso si può vedere nella *fig.* 50, in cui componendosi l'una forza tangenziale *MT* colla perturbante *MK*, ne viene la risultante *MR*, e in virtù di

questa risultante la luna in luogo di descrivere *MO* per portarsi al nodo *O*, imprende la via *Mm*, e la sua orbita taglia l'ecclittica in *m*. E come in questa guisa il nodo cammina da *O* in *m*, o pure da *N* in *N'* (*fig.* 49) in senso contrario al movimento della luna in longitudine; così dicesi che il nodo si è avanzato retrogradando.

295. Due dunque sono gli effetti che si producono in virtù di questa parte della forza perturbante che sospinge la luna verso l'ecclittica; il moto dei nodi e l'inclinazione dell'orbita. Questa inclinazione si aumenta allorchè la luna è al di sopra dell'ecclittica, e dopo che avrà oltrepassato questo piano va diminuendo, e ritorna successivamente allo stesso stato. Ma sia che la luna si avvicini ai nodi, o pure se ne allontani, i suoi nodi continuano a retrogradare, e solamente sono stazionarj quando l'astro è nel nodo, o pure in quadratura.

296. Per determinare la direzione e la quantità del moto dei nodi prendiamo in prima a considerare la luna nella sua semiorbita più vicina al sole, o sia quando partendosi dalla quadratura passa per la congiunzione, e si porta all'altra quadratura. Sia adunque l'astro nella quadratura in *A* (*fig.* 46), e 'l nodo in *C* nella congiunzione; allora non vi ha dubbio (num. 284) che il nodo *C* è stazionario; e nella stessa guisa avverrebbe se la luna fosse nella quadratura in *Q* (*fig.* 51), e 'l nodo in *C*. Ma se la linea dei nodi fosse *MN*, e la luna si muovesse per l'arco *QM*, allora il moto della luna sarebbe diretto verso *M*; ma come la forza perturbante è diretta verso *C* punto dell'ecclittica in cui succede la congiunzione; così l'astro sospinto per la diagonale naturalmente si dirizzerà a un punto intermedio a *M* e *C*, o sia il nodo si avvicinerà alla congiunzione. Che se la luna, oltrepassato già il nodo *M*, si trova nell'arco *MC*, allora sarà diretta da una parte al nodo seguente *N*, e dall'altra verso *C*; e dirizzandosi per la diagonale imprenderà un cammino che precede il punto *N*, e però si avvicinerà del pari alla congiunzione *C*. E parimente portandosi la luna da *C* nella quadratura *R*, la forza perturbante, ch'è diretta ancora verso *C*, farà retrogradare il nodo *N*, e lo farà avvicinare a *C*.

297. Se la posizione dei nodi in luogo di essere *MN* fosse *mn*, o sia il nodo *n* si trovasse tra la congiunzione *C* e la quadratura *R*; allora siccome nel portarsi che

fa la luna da Q in C, in n è sempre diretta a C; così non vi ha dubbio che il nodo n si avvicinerà alla congiunzione C con un moto retrogrado. Ove poi la luna percorre il resto della sua semiorbita, o sia l'arco nR, in tal caso essa è diretta verso m, e nello stesso tempo è sospinta dalla forza perturbante verso C; e però andrà a rincontrare l'ecclittica in un punto al di là di m, per cui si avvicinerà con un moto diretto e progressivo verso C alla congiunzione.

Si può quindi conchiudere che quando la luna si muove da una quadratura ad un'altra passando per la congiunzione, o sia nella sua semiorbita più vicina al sole, il *nodo verso cui essa tende sempre si muove verso la congiunzione.*

298. Siccome le forze perturbanti sono quasi le stesse (num. 288) quando la luna si muove nell'altra semiorbita più lontana dal sole, ed altra differenza non ci ha se non quella, che la forza perturbante in luogo di essere diretta alla congiunzione C, tende all'opposizione in O; così è chiaro che il *nodo verso cui tende la luna*, quando da una quadratura passa all'altra per l'opposizione O, *si muove sempre verso l'opposizione.*

299. È qui da notare che in ogni rivoluzione della luna il moto retrogrado supera il diretto, come corre agli occhi di tutti per mezzo della *fig.* 51. Nella posizione della linea dei nodi MN ha luogo il moto diretto quando la luna percorre QM che è minore di 90°, e il moto retrogrado quando la luna percorre MR ch'è maggiore di 90°, o sia il moto retrogrado supera il diretto. E parimente nella posizione della linea dei nodi nm il moto del nodo per l'arco Qn è retrogrado, e quello per l'archetto nR è diretto, o sia il retrogrado è di gran lunga superiore al diretto. Finalmente se la linea dei nodi sta nella posizione QR, il moto del nodo per tutta la semiorbita QCR è retrogrado, e del pari è retrogrado per l'altra semiorbita ROQ. Per lo che in ogni rivoluzione della luna il moto retrogrado supera il diretto, e i nodi si rivolgono in senso contrario all'ordine dei segni. La loro retrogradazione oltre a ciò è di 19° 20' per anno; questa è tanto più rapida quanto più la luna è vicina alla sizigie, o sia alla congiunzione e all'opposizione, perchè tanto più è gagliarda per la vi-

cinanza la forza perturbante, e quanto più l'orbita della luna declina dall'ecclittica, perchè tanto più cresce l'angolo che formano la forza tangenziale e la forza perturbante, o sia tanto più la luna è deviata. Il giro in fine del nodo nell'ecclittica ha il periodo di anni 18 e mesi 7 1/2, o quasi 19 anni.

300. Dichiarato il moto dei nodi, di leggieri si comprende perchè l'inclinazione dell'orbita della luna sull'ecclittica stia sottoposta ad alcuni cangiamenti in più o in meno, che sono ristretti dentro a limiti certi e definiti. Si supponga di fatto che la linea dei nodi pel suo moto retrogrado lasci la congiunzione *C* (*fig.* 52), e prenda nel secondo cd ultimo quarto la posizione *MN*, e che la luna si muova dal nodo *M* al nodo *N*; in tal caso l'orbita della luna, nell'atto che questa si muove da *M* in *R*, si deve continuamente piegare verso l'ecclittica; perciocchè il nodo *N* (num. 296) si muove verso la congiunzione *C*. Questa inflessione fa sì che nel primo arco *MA* di 90° la luna non diverga dall'ecclittica tanto quanto dovea quando il nodo era in *N*, o sia fa diminuire l'angolo d'inclinazione della luna. Ma da *A* portandosi l'astro in *R*, la sua orbita comincia a convergere verso l'ecclittica, e tanto più quanto più era stata impedita a divergere nel muoversi per *MA*; e però nell'arco *AR* l'inclinazione cresce. Finalmente come la luna si muove da *R* in *N*, il nodo (num. 298) si muove verso *O*, e l'angolo del suo corso in *N* si rende minore di quello che sarebbe stato se il nodo non si fosse mosso, o sia l'inclinazione è diminuita. E come l'arco $MA + RN$ è maggiore di AR; così l'inclinazione dell'orbita lunare all'ecclittica risulta nel nodo seguente, o sia in *N*, minore di quella ch'era stata nel precedente in *M*.

301. Lo stesso si può dimostrare quando la luna si muove nell'altra semiorbita *NQM*. Per lo che si può in generale conchiudere che mentre i nodi si muovono dalla congiunzione ed opposizione per andare alle quadrature in *Q* e *R*, l'inclinazione dell'orbita della luna diminuisce in ogni rivoluzione, finchè essi arrivino alle quadrature, nel qual tempo è la minima di tutte.

302. Si supponga che la linea dei nodi, oltrepassate le quadrature, sia nel primo e terzo quarto, o sia abbia la posizione in *mn*. In tal caso mentre la luna si

muove per mQ, il nodo n si muove (n. 300) verso O, e perciò si aumenta la divergenza dell'orbita, e con essa l'angolo d'inclinazione. Quando poi l'astro si muove per Qa, come il nodo n retrocede, pel num. 301, si diminuisce la divergenza dell'orbita, e con essa l'angolo d'inclinazione. Procedendo in fine la luna per an, si aumenta la convergenza del corso della luna verso l'ecclittica, e con essa ancora l'angolo d'inclinazione. E come lo stesso accade nell'altra semiorbita nRm; così si può stabilire che mentre i nodi si muovono dalle quadrature alla congiunzione e all'opposizione, l'inclinazione cresce dei medesimi gradi, de' quali prima si diminuiva, finchè giungano alla congiunzione ed opposizione, nel qual tempo essa ritorna alla sua prima quantità ch'è la massima di tutte.

303. Ora nel corso di una rivoluzione intera dei nodi in riguardo al sole si trovan due volte i nodi nelle quadrature, e due volte nella congiunzione ed opposizione. E però in ciascuna rivoluzione dei nodi due volte l'inclinazione dell'orbita lunare all'ecclittica alternativamente cresce e manca. D'ordinario dalla massima, ch'è 5.° 17′ 30″, va alla minima 4° 58′ 30″, e da questa ritorna a quella.

304. Lungo sarebbe e forse fuori del nostro istituto di spiegare ad una ad una le altre ineguaglianze periodiche della luna, e di aggiungere a queste le secolari che han luogo o nel moto medio della luna che al presente si accelera, e poi dovrà in un periodo di tempo estesissimo andar ritardando, o nel moto del perigeo lunare che non è uniforme, o nella distanza della luna dalla terra, nell'eccentricità e inclinazione della sua orbita, ec. Per lo che ci può il fin qui detto dare a conoscere come la mutua attrazione dei corpi celesti, che fan vista di alterare le leggi del movimento e dell'orbita della luna, venga al contrario a confermarle e a rassodarle. Basta il dire che in virtù delle leggi dell'attrazione è giunta la teorica a svelare nei movimenti della luna alcune variazioni ed ineguaglianze che l'osservazione non avea prima notato, e poi ha riconosciuto e stabilito giusta il dettato del calcolo e della teorica (Vedi La Place, *Meccan. cel.*; e Biot, *Astron. Fis.* tomo II, lib. 3, cap. 6-11).

305. Come il sole e la terra attraendo la luna pro-

ducono nel suo moto e nel suo corso delle ineguaglianze; così l'azione del sole e della luna influiscono a non poche variazioni nel moto della terra. Si consideri di fatto il punto *M* (*fig.* 46) del globo della terra *ACBD*, su cui il sole *S* esercita la sua forza attrattiva indicata da *MS*. Questa forza ove si scompone, siccome abbiamo fatto nel num. 285, ci somministra due componenti; l'una che opera sopra *E* centro della terra, in virtù di cui si mette in giro in una ellisse, e l'altra è *MH*, ch'è una forza perturbante. E come lo stesso avviene sopra ciascun punto o molecola della terra; così tante sono le forze perturbanti quanti i punti e le molecole della terra. Ma perchè l'azione di tutte queste forze perturbanti si esercita sopra una massa solida, operano in sì fatto modo tra loro, che alcune tendono ad alterare il moto del globo, ed altre a contrastare e distruggere l'effetto di sì fatta turbazione. Se la terra fosse una sfera perfetta ed omogenea, non vi ha dubbio che l'azione delle forze perturbanti sarebbe nulla, e l'attrazione solare sopra *E* opererebbe come se fosse una forza unica. Ma essendo la terra elevata all'equatore e compressa ai poli, le azioni delle forze perturbanti non si distruggono del tutto, e ne dee risultare, come ne risulta, una perturbazione.

Si suol riguardare la protuberanza della terra al suo equatore come un anello, e per cagione di semplicità si suol considerare non tutto l'anello, ma un sol punto, o pure un monte situato nell'equatore terrestre, che si alza e domina tutto il globo. Questo punto o monte è trasportato dalla rotazione dalla terra, e gira intorno al suo centro in 24 ore, come la luna gira intorno alla terra in un mese. Questo monte passa girando dinanzi al sole, e si trova tra questo astro e la terra come la luna quando è nuova; se ne allontana e rincontra il sole a mezzanotte quando è nella parte opposta del suo circolo, come la luna quando è piena. Questo monte adunque si può riguardare come una luna o satellite della terra, che descrive il suo giro con più celerità che non fa la luna descrivendo la sua orbita più grande.

Questo monte o sia questo nuovo satellite sente l'azione della massa solare come la luna, e deve esser perciò sottoposto alle stesse ineguaglianze. E come si trova nel piano dell'equatore, e 'l sole è fuori di questo pia-

no; così il sole tirando a sè questo monte in una direzione inclinata, deve sospingerlo fuori dell'equatore e far retrocedere l'intersecazione sua coll'ecclittica, come fa retrocedere i nodi della luna (num. 299). Ma perchè il monte forma un tutto coll'anello dell'equatore a cui è legato, e colla massa della terra a cui è impiantato, non potrà egli uscire fuori dell'equatore, ma seco strascina e trasporta tutta la massa della terra. E sebbene questo moto diviso per tutta la massa della terra riesca piccolo ed insensibile; pure perchè l'azione del sole si ripete in tutti i momenti e si accumula nel medesimo senso, per quanto sia piccola, diviene col tempo sensibile; e la terra è costretta a seguire, malgrado la sua resistenza, il moto particolare cui è soggetta una di lei parte, qual è il monte situato nell'equatore.

Per abbracciare poi tutto intero il problema bisogna che si riguardino tutti i punti elevati dell'equatore terrestre; e però l'azione del sole si deve moltiplicare per ciascun punto dell'anello o sia dell'equatore terrestre. I nodi quindi delle orbite di tutti questi punti sono retrogradi come i nodi dell'orbita lunare. E come tutti questi punti sono legati tra loro, e fanno unico sistema colla massa della terra; così da tutti questi moti retrogradi risulta un moto nell'equatore tutto terrestre e in tutta la terra, che fa retrogradare i suoi punti di intersecazione coll'ecclittica. L'intersecazione adunque dell'equatore coll'ecclittica, o sia gli equinozj debbono avere in virtù dell'azione del sole un moto retrogrado, e la terra può rallentar questo moto per la sua massa e non estinguerlo.

306. Si può meglio comprender ciò riguardando alla *fig.* 49, in cui *ON* rappresenta l'anello dell'equatore, ed *EN* il piano dell'ecclittica. Poichè l'attrazione del sole tende a far cadere quell'anello verso questo piano, e la rotazione della terra si oppone all'azione del sole in tal modo che ciascun punto *L* dell'anello è sospinto da due forze; l'una della rotazione da *L* in *N*, e l'altra per l'attrazione da *L* verso *EN*, le quali potendosi rappresentare da *La*, *Lb*, ci danno la risultante *Lc*, che sospinge il nodo da *N* in *N'*. Per lo che il piano dell'anello o sia l'equatore, in luogo di camminare parallello a sè stesso, cangerà alquanto di direzione, e la sua intersecazione coll'orbita retrograderà di 50', 1 per

ciascun anno. Dovrebbe per una sì fatta retrogradazione avvenire ancora un cangiamento nell' angolo d' inclinazione N'; ma non ha luogo, perchè l'azione che dovrebbe produrre questo cangiamento viene ad esser distrutta da un' azione eguale che si esercita sulle molecole dell' equatore, che sono situate al di là del punto del nodo N.

307. La luna al par del sole opera sull' anello dell' equatore, e tira ciascun punto di questo anello verso la sua orbita, e cospira perciò col sole a far retrogradare il nodo dell' equatore sull'ecclittica, o sia a far precedere (num. 254) gli equinozj. Oltre di che la luna non è che accidentalmente sull'ecclittica, e colla sua azione sopra l'equatore fa sì che questo cangi la sua inclinazione sull' ecclittica nel modo che abbiamo dichiarato nel n. 300, e cangiandone l'obbliquità produce (num. 191) la nutazione. Quest' azione della luna sull' equatore terrestre varia, siccome è naturale, come si va allontanando nel cammino che fa nella sua orbita, e secondo che la sua orbita va mutando posizione. E come tutte le distanze in cui si può ritrovare la luna in riguardo all' equatore terrestre, e tutte le sue azioni differenti sopra questo piano che dipendono dalla sua distanza, il periodo in somma degli effetti della luna sopra l'equatore terrestre si perfeziona e ritorna colla rivoluzione dei suoi nodi; così l'angolo che fa l' intersecazione dell'equatore terrestre coll' ecclittica si cangia, va e viene ed oscilla col periodo dei nodi della luna. Per lo che l' obbliquità dell' ecclittica è sottoposta ad alcune piccole oscillazioni, che nel periodo di 18 in 19 anni l'allontanano dal suo stato medio, o pure a questo l' avvicinano in sensi opposti. Una simigliante oscillazione produce ancora l' azione del sole, sebbene sia debolissima, e dall'unione di questi due effetti si compone e risulta la nutazione che chiamasi dagli astronomi *lunisolare*.

308. L' attrazione adunque del sole e della luna sopra il gonfiamento equatoriale della sferoide della terra produce i due effetti notabili della precessione e della nutazione. L' azione del sole è quella che principalmente opera il cangiamento lentissimo della linea d' intersecazione dell'equatore coll' ecclittica, e cagiona la retrogradazione dei punti equinoziali o la precessione degli equinozj (num. 189). E perchè la posizione del sole in riguardo all'equatore terrestre non è sempre la stessa, ma

varia in un mezzo anno tropico; così ne nascono delle piccole oscillazioni nella precessione degli equinozj, che ora l'accrescono e ora la diminuiscono, ed hanno il periodo di un mezzo anno tropico. Variando quindi in virtù dell'azione solare sopra di ogni altro la retrogradazione dei punti equinoziali, varia la posizione dell'asse della terra; e questo prolungato nella sfera celeste dà a vedere che il polo vero descriva intorno al polo dell'ecclittica, siccome è stato da noi indicato nel num. 191, una superficie conica. L'azione poi della luna è quella che sopra di ogni altra cosa produce le oscillazioni dell'obbliquità dell'equatore coll'ecclittica, e cagiona nell'equatore e perciò nell'asse terrestre un movimento di librazione attorno alla linea sempre variabile degli equinozj, per cui il polo dell'equatore fa sembianza di descrivere l'ellisse di nutazione (num. 191), i cui assi calcolati oggi con esattezza sono di 9",6 e di 8" più precisamente che non sono stati accennati nel num. 191. Dopo di che riesce a chiunque manifesto come dai fenomeni precessione e nutazione siesi argomentata la quantità dello schiacciamento della sferoide terrestre, e come siesi per mezzo della nutazione in particolare determinata la massa della luna da noi indicata nel num. 271. Poichè l'attrazione in quei due fenomeni è proporzionale alle masse del sole e della luna ed alla protuberanza dell'equatore terrestre.

309. L'attrazione dei pianeti tra loro o di tutti sopra la terra cangia a poco a poco la direzione dell'ecclittica nello spazio, e da tal cangiamento deriva una diminuzione progressiva e lentissima nell'obbliquità dell'ecclittica, ed un movimento nella linea degli equinozj. Per lo che l'uno e l'altro movimento si compone con quello che l'azione del sole e della luna avrebbe prodotto, se questi due astri avessero soli operato colla loro forza attrattiva. E però gli effetti da noi già dichiarati della precessione e della nutazione sono modificati dall'azione dei pianeti.

Ora nello stato attuale del cangiamento di direzione dell'ecclittica nasce un movimento annuo di 0",9655 negli equinozj, che ha luogo nel senso diretto o secondo l'ordine de' segni, ed è perciò contrario al moto cagionato dal sole e dalla luna ch'è retrogrado. Per lo che la precessione annua degli equinozj, che da noi si os-

serva, è la differenza di questi due movimenti contrarj, l'uno diretto e l'altro retrogrado.

Il cangiamento di obbliquità o sia la diminuzione progressiva dell'obbliquità, per cagione dell'azione dei pianeti, si valuta di 52'',1154 per secolo, o sia è un centesimo della precessione, giacchè quella diminuzione è quasi $\frac{1''}{2}$ per anno. Ma oggi è dimostrato dalla teorica che questa diminuzione non sarà sempre progressiva, e tempo verrà in cui si comincerà a rallentare, e poi cessando del tutto, l'obbliquità dell'ecclittica sull'equatore comparirà costante. Dopo di che comincerà a muoversi in senso contrario, allontanandosi l'ecclittica dall'equatore a poco a poco per li medesimi gradi e periodi pei quali si era avvicinata. Questi stati alternativi di aumento e decremento sono racchiusi dentro a limiti stabili, hanno luogo in secoli, e producono una oscillazione eterna dell'ecclittica attorno la linea variabile degli equinozj. In questo modo *MOPN* (*fig.* 50) si bilancia ed ha un moto di librazione intorno alla linea degli equinozj *ON*; e però le stelle che eran lontane da *M* nello stato attuale di diminuzione dell'obbliquità, gli si sono avvicinate, e quelle ch'eran vicine a *P*, se ne sono allontanate. Ora questa obbliquità dell'ecclittica, che al presente decresce quasi il centesimo della precessione, si chiama lo stato medio o l'obbliquità media, e sta sottoposta a quelle piccole oscillazioni che provengono dall'azione della luna e del sole, che sono state da noi dichiarate nel num. 307, e portano il nome di nutazione *lunisolare*.

310. È qui da avvertire in primo luogo che gli effetti che provengono dall'azione dei pianeti sono di per sè indipendenti dalla figura della terra, e pigliano solo un'influenza indiretta a cagion di questa figura. Poichè smovendo i pianeti il piano dell'ecclittica, viene la terra ad esporre la sua sferoide in modi differenti all'azione del sole e della luna; e questi due astri operando diversamente sulla sferoide terrestre di quello che operato avrebbero se il piano dell'ecclittica fosse stato immobile, producono alcune modificazioni novelle nel moto dei punti equinoziali e nella obbliquità dell'ecclittica. Queste variazioni in secondo luogo, cui è soggetta l'azione del sole, rendono la precessione ineguale in molti secoli, e fan sì che la retrogradazione dei punti equino-

ziali sia al presente più grande di 0",455, che non era al tempo d'Ipparco. N'è quindi risultato un leggiero cangiamento nella durata media dell'anno tropico, che si valuta dal ritorno del sole al medesimo equinozio (n. 129). Giacchè retrogradando di più l'equinozio, il sole giunge a questo punto in un intervallo più corto che non era ai tempi d'Ipparco, e si valuta 11",08 (V. Biot, *Astron. fis.* l. 2, c. 5 e 6).

311. Venere e Giove colla loro attrazione, alterando e modificando l'attrazione del sole sopra la terra, producono un movimento (num. 115) sul grand'asse dell'orbita terrestre, per cui non riesce fisso nel cielo, e pare che l'eclittica giri nel suo piano intorno al fuoco in cui è collocato il sole. Questo moto è diretto secondo l'ordine dei segni, giacchè secondo l'ordine dei segni progrediscono i due punti, che sono il perigeo e l'apogeo terrestre, e descrivono 11",8 in ciascun anno. È chiaro da ciò che il grande asse o la linea degli apsidi può coincidere colla linea degli equinozj, o pure essere a questa perpendicolare. Quando il grand'asse è perpendicolare alla linea degli equinozj, l'equatore divide l'eclittica in due porzioni ineguali, di cui la più piccola è situata dalla parte del perigeo, e questa circostanza giunta col movimento del grand'asse ci dà a comprendere perchè le durate delle quattro stagioni risultano ineguali (num. 121) e variabili in diversi secoli. Al presente che la posizione dell'eclittica è quella ch'è stata indicata nella *fig.* 33, la primavera e la state, che da ♈ passando per *A* va a ♎, sono più lunghe dell'autunno ed inverno presi insieme, e la differenza è intorno a sette giorni (num. 123). Quest'intervalli diventeranno eguali verso l'anno 6485, allorchè il perigeo arriverà all'equinozio di primavera, e progredendo più oltre la primavera e la state riunite diventeranno di una durata più breve dell'autunno e dell'inverno.

312. L'azione dei pianeti, ch'è sensibile nelle variazioni cui sta sottoposta la terra nel corso dei secoli, turba ancora il moto ellittico di ciascuno di loro. E primieramente chiunque comprende che per la forza perturbante che si parte dai pianeti si venga ad alterare la loro linea degli apsidi, che dovrebbe essere stazionaria (num. 258) in virtù della forza dell'attrazione solare. Indi l'osservazione ci ha dimostrato che nel giro di

più secoli l'afelio di Saturno, Giove, Marte, Venere e Mercurio si muove. L'inclinazione ancora delle loro orbite all'ecclittica sta sottoposta a variazioni le quali nascono dal moto dei loro nodi; e questo, come abbiamo dichiarato parlando della luna (num. 294), proviene dalle diverse forze attraenti dei pianeti. Tutti in somma gli elementi (tranne due che sono i grand' assi e i moti medj) dell' ellissi planetarie hanno delle variazioni per la loro mutua attrazione, sebbene queste sieno lentissime e riescano sensibili nel corso di secoli. Poichè La Place ha dimostrato che, avuto riguardo alle sole ineguaglianze secolari che derivano da un sistema di pianeti che si attraggono tra loro, gli assi delle loro orbite variabili debbono essere costanti, e i loro moti medj uniformi.

313. Gli effetti di queste mutue attrazioni sono sopra ogni altra cosa molto sensibili nei movimenti di Giove e di Saturno. Quando Giove si trova tra il sole e Saturno, tutta la sua attrazione opera sopra Saturno, ed accresce la gravità di questo pianeta verso il sole. Ed all' inverso Saturno nella congiunzione esercita la sua attrazione sopra Giove ed il sole nella medesima direzione; e perciò la loro relativa posizione vien disturbata. La Place ha dimostrato che se l'azione di Giove rallenta il moto di Saturno, quella di Saturno deve accelerare il moto di Giove. Calcolando in fatti la variazione che deve sopravvenire alla longitudine media di questi due pianeti, ne ritrasse che in Saturno ha luogo una ineguaglianza di 2924",5 nel suo *maximum*, il cui periodo è di 97 anni e 1/4. Dimostrò inoltre che il moto di Giove è sottoposto ad una ineguaglianza corrispondente, il cui periodo e la cui legge è quasi la stessa, ma che giunge nel suo *maximum* a 1249",5, e porta un segno contrario all'ineguaglianza di Saturno, per indicare che mentre l'uno ritarda, l'altro accelera. Verso l'anno 1560 l'accelerazione dell' uno e 'l ritardamento dell' altro pianeta è pervenuto al *maximum*, e da questo tempo in poi i moti medj apparenti si sono più avvicinati ai loro veri moti medj, finchè quelli son diventati a questi eguali nel 1790.

314. Tutti dunque i movimenti dei corpi celesti e tutte le loro variazioni sono stati ricondotti alla legge generale dell' attrazione; e la teorica è giunta non solo a di-

chiarare in generale, ma a definire con esattezza la ragione e la quantità di tutte le perturbazioni che danno a vedere i pianeti e i satelliti nei loro movimenti. Dimodochè l'esatta e puntuale corrispondenza tra le osservazioni e il principio dell'attrazione è oggi la prova la più certa ed evidente della verità delle leggi dell'attrazione. Anzi la teorica coll'ajuto di queste leggi ha dimostrato che quali si sieno le masse dei pianeti, perchè tutti si muovono nel medesimo senso, in orbite poco eccentriche e poco inclinate tra loro, debbono sortire delle ineguaglianze secolari, come sono quelle dei moti degli apsidi e dei nodi delle loro inclinazioni, ec., che sono tutte periodiche e racchiuse in certi limiti che non oltrepassano giammai. Per lo che il sistema planetario a cagione delle mutue attrazioni non fa che oscillare e librarsi intorno ad uno stato medio di ellitticità o d'inclinazione, da cui poco si allontana. Indi è che l'ecclittica non potrà mai combaciare coll'equatore, e che le orbite dei pianeti saranno sempre quasi circolari.

315. Le comete ancora, come quelle che appartengono al nostro sistema (num. 237), sono perturbate nel loro corso, e le perturbazioni del loro movimento ellittico sono più di ogni altro a noi sensibili (n. 239) nel ritorno ai loro perielj. Si è temuto da molti il passaggio delle comete vicino alla terra; ma esse passano così rapidamente, che gli effetti della loro attrazione non sono molto da temersi; per altro tra tutte le comete conosciute quella del 1770 si è più avvicinata alla terra, ed intanto n'era lontana 800 mila leghe. È sopra di ogni altro l'urto di una cometa contro la terra che potrebbe cagionare gran disastri e inondazioni, e distruggere i monumenti della specie umana. Ma l'urto di una cometa contro la terra, il quale è possibile, non è per certo probabile almeno nel corso di un secolo; perchè la terra ed una cometa sono masse così piccole in riguardo all'immensità dello spazio in cui si muovono, che difficilmente si possono incontrare. Il certo è che le comete forse per la picciolezza delle loro masse non hanno recato alcuna turbazione sensibile al sistema dei pianeti, o almeno se ha avuto luogo qualche perturbazione, ha sfuggito sino al presente le nostre osservazioni.

CAPO IV.

DEL FLUSSO E RIFLUSSO DEL MARE O DELLE MAREE.

316. L'attrazione, ch'è la cagione dei movimenti celesti, estende la sua influenza e mostra chiaro i suoi effetti sulle acque del mare, e in quel fenomeno che porta il nome di *flusso* e *riflusso*, e riducesi ad un abbassamento e innalzamento delle acque del mare due volte quasi in un giorno per un moto di oscillazione regolare. Le acque dell'Oceano, e in generale di tutti i mari che hanno grand'estensione, si gonfiano prima, e montando quasi per sei ore inondano le ripe e penetrano nell'interno dei fiumi a molta distanza dalla loro foce: questo movimento delle acque si chiama *flusso*. Le acque che s'innalzano, giungono ad una grande altezza in cui stansi per pochi istanti, e in questo punto succede ciò che dicesi *alta marea*. A poco a poco cominciano ad abbassare gradatamente e giusta gli stessi periodi per li quali si erano innalzate, ritirandosi dai luoghi che già aveano inondato: questo movimento, che dura parimente un quarto di giorno, si distingue col nome di *riflusso*. Giungono abbassandosi alla maggiore loro depressione, in cui non restando che momenti, si dice che ha luogo la *bassa marea*. Comincia di nuovo il flusso a tenore delle medesime leggi, e giusta il medesimo periodo di nuovo succede il riflusso, e così si ha continuamente flusso e riflusso, alta e bassa marea. Ora questo fenomeno, ch'è generale, nasce e deriva dall'azione o attrazione del sole e della luna sopra le acque del mare.

317. Cominciando dall'azione del sole, si consideri in prima questo astro che si muove uniformemente nell'equatore. Non vi ha allora dubbio che il sole esercita la sua forza così contro il centro della gravità della terra, come sopra ciascuna molecola d'acqua che ricopre la superficie della terra. Se l'azione del sole sul centro di gravità della terra e sopra le acque del mare fosse la stessa, conserverebbero per certo l'uno e le altre, come egualmente attirati, la medesima distanza tra loro, nè si verrebbe a turbare l'equilibrio delle acque, perchè queste peserebbero tutte ed egualmente riguardo al cen-

tro della terra che le attira. Ma le forze con cui opera il sole sul centro di gravità della terra essendo diverse, così in quantità come in direzione, da quelle che sviluppa contro le acque del mare, ne segue che queste sono più o meno attirate, più o meno pesano, e viene meno il loro equilibrio. Così il sole che si trova in S (*fig.* 45) attira più le acque della superficie della terra che il centro T, che n'è più lontano, ed operando in senso contrario alla gravità diminuisce il peso delle acque. Per lo che debbono le acque che sono all'intorno muoversi verso quelle che pesano meno a cagione dell'attrazione solare, e le une colle altre congiunte ed ammassate si alzano e si gonfiano. Succede quindi prima il flusso e poi l'alta marea. Dodici ore dopo col rotar della terra le stesse acque si trovano in opposizione col sole, ed allora l'attrazione solare operando più sul centro della terra e meno sulle acque che ne sono più lontane, la distanza tra quello e queste si accresce, e colla distanza viene a menomarsi la loro gravità verso il centro della terra. Pesano quindi meno, si muovono di nuovo le acque dei luoghi circostanti, di nuovo succede flusso e di nuovo alta marea. Ma come le acque che prima furono attirate direttamente da S, passano col girar della terra dal meridiano superiore all'inferiore, van ripigliando il loro peso; così cominciano a sgonfiarsi, e succede prima il riflusso e poi la bassa marea. E nella stessa guisa come le acque dalla opposizione o sia dal meridiano inferiore si muovono verso il superiore, si tornano a sgonfiare, avviene prima il riflusso e poi la bassa marea. Per l'azione dunque del sole quasi in 24 ore hanno luogo due flussi e riflussi, due alte e basse maree.

318. L'azione del sole sarebbe insensibile sopra un numero piccolo di molecole aquee; ma siccome giusta i principj dell'idrostatica le impressioni che ricevono una o più molecole in una massa fluida si comunicano a tutta la massa; così di leggieri si comprende che il flusso e riflusso debba aver luogo ed esser più notabile nell'Oceano e nei mari di grand'estensione, in cui si mette in movimento una gran massa d'acqua, e riesca al contrario insensibile nei laghi, nel mar Nero, nel mar Caspio, e non abbia luogo nel Mediterraneo se non nei luoghi stretti e verso l'Adriatico. Newton per dar meglio a comprendere questa verità finse un canale sul fondo del

mare, su cui s' innalza verticalmente un tubo, il quale prolungato passa pel centro del sole. Ricava quindi da sì fatta posizione del canale e del tubo, che le acque in questi racchiuse si debbono innalzare per la forza attrattiva del sole, chiamando a sè le lontane che corrono a collocarsi, per mantenere l' equilibrio, nel tubo sotto del sole. Quanto adunque il canale è più lungo ed esteso, tanto è maggiore il numero delle molecole aquee che corre ad affollarsi nel tubo, e tanto più in questo cresce la quantità dell'acqua che s' innalza sopra il livello naturale. Per lo che non si può togliere che la profondità ed estensione de' mari influisca notabilmente nel fenomeno delle maree.

319. Sebbene la turbazione dell' equilibrio del mare, come effetto dell'attrazione del sole, sembra che debba cominciare quando comincia l'azione della causa, e giungere al suo *maximum* quando a questo punto giunge l'energia della causa, o sia quando il sole si trova verticale passando pel meridiano; pure non avviene così, e 'l flusso e la marea ritarda più o meno in punti diversi, e specialmente nei porti e in quei luoghi che sono lontani dall'equatore. Pare che sia una legge generale in natura, che gli effetti delle cause naturali, le quali operano gradatamente sopra una grand'estensione, non si rendono sensibili se non dopo che ha cominciato ad operar la causa, e non arrivino al suo *maximum* se non quando comincia a scemare l'attività maggiore della causa. Imperocchè essendo piccola l'azione del sole, e questa dovendosi diffondere sopra un gran numero di molecole aquee, non si può rendere manifesta ai nostri sensi immediatamente, ma deve rendersi sensibile dopo qualche tempo che ha cominciato ad operare. Indi è che il principio dell' effetto viene dopo quello della causa, e il *maximum* dell' effetto ritarda e vien dopo il tempo in cui il sole ha spiegato la sua forza più gagliarda, o sia dopo il suo passaggio al meridiano. È da attendersi inoltre a tante resistenze che incontrano le acque, allorchè mettonsi in movimento. Le aderenze che hanno le molecole dell'acqua tra loro, lo sfregamento cui stan sottoposte le acque movendosi, le ineguaglianze della profondità dei mari, la rotazione diurna della terra, e tutti gli ostacoli dei continenti, dei golfi o di altro in cui s' imbattono, sono tante cause che molto influiscono a

ritardare il principio e 'l progresso del flusso e l'ora dell'alta marea. Le acque del mar Pacifico, quando si pongono in movimento, incontrano prima l'ostacolo della Nuova Zelanda e Nuova Olanda, e quello inseguito del continente dell'Africa. Passando poi tra l'Africa e l'America incontrano la costa di Spagna e di Francia per internarsi in fine nello stretto di Calais. Per altro gli ondeggiamenti del mare si propagano in tempo, e 'l loro cammino non è istantaneo, ma successivo. Per lo che quanto più lontani sono situati i porti, tanto più tempo ricercasi a propagarsi gli ondeggiamenti che traggono la loro origine dal turbato equilibrio. È noto che nel mar Rosso da Moka sino a Suez la marea percorre 24 leghe in un'ora, e 20 nelle coste di Francia. Nè si può meglio osservare questo successivo cammino della marea che nei gran fiumi, com'è quello delle Amazzoni nello stretto di Pauxis, in cui il flusso del mare s'interna ad una distanza notabile dalla foce, ritardando di più nei punti interiori e più lontani dal mare. Le circostanze adunque locali, le distanze dall'equatore, la posizione dei porti fan variare le ore delle maree, e producono una differenza considerevole, eziandio nei porti vicini, perchè un'isola, uno stretto, un golfo, un porto opera e varia il ritardo. Ma come le circostanze, indipendenti dall'attrazione, che cagionano il ritardo in ciascun porto, sono quasi costanti; così costante viene ancora a risultarne il ritardo, e questo ritardo costante, che nella marea si osserva in un porto, porta il nome di *stabilimento del porto.*

320. All'azione del sole sulle acque del mare è da aggiungersi quella della luna, che sebbene sia fornita di una piccola massa in riguardo a quella del sole, pure opera con molta forza sulla terra per la sua vicinanza. Considerando adunque la luna che si muove nell'equatore, il peso delle acque situate dal canto della luna è diminuito, perchè sono più attirate che il centro della terra, e quest'attrazione le innalza sulla superficie di livello del globo. Lo stesso avviene alla massa fluida ch'è diametralmente opposta, perchè questa è meno attirata che il centro della terra, in modo che da un lato sono le acque che si alzano, e dall'altro è il centro della terra che fugge, e quasi la superficie della terra abbassandosi lascia le acque innalzate. Per l'azione quindi della luna,

nella stessa guisa che avviene per quella del sole, le acque pesano meno nei punti della terra diametralmente opposti. E però a compensare questa diminuzione di peso nei punti opposti della sferoide terrestre si ammassano le acque in forma di montagne, che seguendo la luna nel suo corso, percorrono colla rotazione diurna la superficie dei mari. E come la massa totale delle acque è sempre la stessa; indi è che le acque debbono venir meno in quelle parti del mare che sono alla distanza di 90 gradi dalla luna. Due adunque sono i flussi e due ancora i riflussi, e due le alte e basse maree che provengono dall'azione della luna in un giorno lunare. Si può vedere nella *fig.* 45 come la luna sovrastando genera le maree.

321. Ci è dato di conoscere l'impronta dell'azione lunare sulle maree dal ritardo di queste, che corrisponde al moto della luna. Siccome la luna per tornare allo stesso punto del meridiano ritarda quasi di tre quarti (u. 167); così in corrispondenza dello stesso tempo ritarda l'alta marea. Veramente gl'intervalli non sono sempre gli stessi, ed hanno una durata media di giorno 1,035050 di tempo medio, da cui poco si allontanano, ed in questo tempo han luogo due basse e due alte maree. Poichè questo è il tempo esatto che impiega la luna a ritornare allo stesso meridiano col suo moto medio. Per lo che se l'alta marea è accaduta in un porto oggi ad ore 0, domani avrà luogo ad ore 0,35050, dopo domani ad ore 0,70100, e così di mano in mano ritardando sempre di ore 0,35050. L'intervallo poi che separa due alte maree non è costantemente lo stesso; perciocchè il suo valor medio è di ore $12,4205 = 12^{\circ}\ 25'\ 14'',15$, partecipando così ai ritardi della luna. Chiunqne in fine si accorge che oltre a questo ritardo, che nasce dal corso della luna, deve porsi in considerazione quello che risulta dalle circostanze locali, siccome si è da noi dichiarato nel num. 319. Indi è che a Dunkerque l'alta marea succede una mezza giornata dopo il passaggio della luna al meridiano, a Saint-Malò quasi 6 ore dopo, e molto meno al Capo di Buona Speranza.

Egli è manifesto dopo ciò che vi avranno quattro maree per giorno, due prodotte dall'azione del sole e due dalla luna; e queste maree, che sono separatamente eccitate dall'azione del sole e da quella della luna, si com-

binano tra loro senza turbarsi. È a chiunque noto che le onde piccole e leggiere eccitate in uno stagno d'acqua si soprappongono le une alle altre nello stesso modo che si sarebbero disposte separatamente sulla superficie dell'acqua tranquilla. Questa verità di esperienza è stata ridotta a principio ed espressa in meccanica, dicendo che il moto totale di un sistema agitato da piccolissime forze è la somma dei movimenti parziali che ciascuna forza gli ha impresso separatamente; di che si ricava che i due flussi parziali del sole e della luna combinandosi debbono dar origine al *flusso composto* che si osserva d'ordinario in tutti i porti. Segue da ciò che ove le azioni del sole e della luna cospirano, la marea o il flusso composto viene a risultare il più grande. Di fatto le maree più grandi han luogo nella nuova e piena luna, o, come dicesi, nelle sizigie, massime quando queste arrivano a mezzogiorno. Poichè stando il sole in S (*fig.* 45) e la luna in L, le forze di questi due astri si compongono, e danno origine alla marea composta ch'è la più grande. Ma se la luna trovasi nelle quadrature, l'azione della luna e del sole si contrastano, e il flusso composto riesce il più piccolo. Così stando la luna in Q e 'l sole in S, succede sotto di Q nel medesimo tempo l'alta marea solare; giacchè nel tempo che le acque per l'azione della luna si gonfiano sotto Q, ne son distolte dall'azione del sole che le richiama sotto S. Però la marea composta o totale risulterà eguale alla differenza delle due maree parziali. L'altezza adunque totale delle maree dipende dall'azione combinata di questi due astri, ed è la più grande nelle sizigie e la più piccola nelle quadrature.

322. Dalle maree composte si ricava il segno e 'l carattere a cui si distingue quali delle due maree parziali sia la più grande, o, in altri termini, quale sia la più forte tra le due azioni del sole e della luna sopra le acque. Poichè basta a ciò che si metta in confronto l'elevazione dell'alta marea sulla bassa quando la luna è nella sua distanza media, così nelle sizigie che nelle quadrature, per la ragione che l'altezza della sizigie ci porge la somma delle due forze del sole e della luna, e quella delle quadrature ce ne somministra la differenza; di modo che conosciuta la somma e la differenza di queste due quantità, se ne giunge subito a conoscere il loro rap_

porto. Con questo metodo La Place ha trovato e stabilito che l'intensità della forza del sole è un terzo di quella della luna. Ed essendo questo astro la cagione principale e più energica delle maree, chiunque comprende che colla luna e colle sue fasi sien da regolarsi i periodi delle maree, perchè queste debbono seguire la forza della luna ch'è tripla di quella del sole. Indi è che le ore delle maree in un porto si cominciano a contare dal giorno della luna nuova, e si va da quest'epoca osservando il ritardo delle maree negli altri giorni consecutivi, e però l'ora in cui accade la marea nel giorno della luna nuova in un porto si segna, e forma in particolare ciò che dicesi stabilimento del porto.

323. Sinora si è considerato il moto del sole e della luna, come se questi due astri si muovessero nell'equatore; ma per meglio dichiarare il fenomeno, sono da riguardarsi nelle varie loro posizioni, giacchè declinano più o meno, e più o meno sono nel loro cammino lontani dalla terra. Ed in verità venendo le forze del sole e della luna a cangiar di energia secondo le distanze, quanto più la luna è vicina a noi tanto più la marea avrà di forza; e però la marea sarà più forte quando la luna sarà perigea, e meno quando sarà all'apogeo. E parimente l'azione del sole sarà più energica al perigeo che all'apogeo, sebbene la piccola eccentricità dell'ecclittica non renda sensibile una variazione sì fatta. E in generale la marea sarà al *minimum* nelle quadrature, se la luna è apogea; e se è perigea, sarà al *maximum* nelle sizigie, e le maree degli equinozj sono le maggiori, quando succedono colla luna perigea, giacchè la luna è nel punto della più grande vicinanza alla terra. Poste quindi tutte le circostanze eguali, la marea più grande è doppia della più piccola, e quella succede la terza dopo la sizigia, e questa la terza dopo una quadratura. Poichè dalle osservazioni istituite nel porto di Brest la marea totale, ch'è la semisomma di due alte maree consecutive sopra il livello della bassa marea intermedia, è metri 5,888, e la più piccola è metri 2,789 (V. T. V della *Mecc. cel.*).

324. Siccome il movimento delle acque che resta dopo la marea dura più quanto più è stata forte l'azione degli astri che lo producono; così le piccole maree le quali succedono alle grandi, crescon per questa causa di più

delle grandi che succedono alle piccole, ed è questa del pari la ragione per cui le massime e minime maree che han luogo nelle sizigie o nelle quadrature, accadono due o tre maree (num. 323) dopo che gli astri sono stati nella congiunzione, o in una sizigia, o pure in una quadratura.

325. A parte dei venti che colla loro azione possono modificare le maree, vi hanno delle circostanze locali. La stessa marea può arrivare in un porto per più passaggi o canali, ed in uno più presto, nell'altro più tardo. Se quindi la prima arriva alle tre e la seconda alle nove ore dopo che la luna è passata pel meridiano, allora accaderà un'alta marea per ogni sei ore. E se la luna si troverà nell'equatore, l'acqua in quel giorno si terrà stazionaria alla medesima altezza; perchè comincia a calare la marea precedente quando comincerà a montare la marea che segue, e per eguali aumenti e decrementi l'acqua si manterrà sempre allo stesso livello. Questi ed altri simili fenomeni, che dipendono dalle circostanze locali, furono osservati dall'Hallejo nel porto di Batsha nel regno di Tunquin.

326. Chiunque dalle cose qui accennate si può persuadere che veramente l'azione del sole e della luna sia la causa fisica del flusso e riflusso del mare. Questa spiegazione è stata per altro condotta sino alla dignità di teorica; giacchè non vi ha circostanza o particolarità, così nel tempo come nella quantità, che non si dichiari e sia concorde alle leggi dell'attrazione, e alla posizione dei due astri modificata dalle circostanze locali. La Place, che nella sua *Meccanica celeste* ha dichiarato quanto meglio si può questa teorica, ha ridotto tutte le ineguaglianze del sole e della luna nel loro moto o velocità, o la loro varia distanza e declinazione al caso semplicissimo del sole e della luna, che si muovono uniformemente sopra l'equatore. Per mandare ad effetto questa riduzione e comprendere tutte le ineguaglianze, egli imprime al sole ed alla luna dei moti molto differenti nelle loro orbite. Ricava da tali moti varj flussi e riflussi, il primo dei quali ha il periodo di una metà del giorno, il secondo di un giorno intero, il terzo di un mese o di un anno. Indi spiega le ineguaglianze delle altezze e degli intervalli delle maree giusta i periodi di ore 12 e di ore 24, di metà di un mese e di un mese

intero, di mezzo anno o di un anno, o pure della rivoluzione dei nodi e del perigeo della luna, e mostra una perfetta conformità tra il calcolo e le osservazioni fatte nel porto di Brest.

Noi non possiamo entrare in tutte queste particolarità, e ci basti aver mostrato come l'attrazione che lega i corpi celesti tra loro, unisce la terra agli altri pianeti, e incatena la precessione degli equinozj, la nutazione e 'l flusso e riflusso del mare agli altri fenomeni celesti.

CAPO V.

EPILOGO E BREVE STORIA DELLA FISICA O MECCANICA CELESTE.

327. Incominciando ad osservare il cielo, e notando tutte le apparenze che veggonsi dai nostri occhi, sia che fossero ajutati o no dagli stromenti, abbiamo con diligenza esposto i varj movimenti del sole, il moto diretto e retrogrado, o pure la stazione dei pianeti inferiori e superiori, le vicende cui stan sottoposti la luna e i satelliti degli altri pianeti, il moto che fan sembianza di seguire le stelle sia in longitudine sia in latitudine, o pure quello delle comete. Ordinati e raccolti questi moti apparenti, siamo venuti nel sospetto, a causa della loro bizzarria e del loro intralciamento, di qualche illusione; e dubitando della testimonianza dei nostri sensi, abbiamo posto col pensiero in movimento la terra, e lasciato il sole in riposo, come centro dei movimenti dei corpi che formano il nostro sistema planetario. Facile fu allora e chiara la spiegazione di tutti i fenomeni, e si conobbe la ragione per cui i pianeti sembrino ora diretti, ora retrogradi, e alcuna volta stazionarj; si comprese in qual modo abbia luogo il periodo annuo e giornaliero del sole o il ritorno delle stagioni; si seppe perchè le stelle fisse mostrano di aberrare; e quel ch'è più, ridotti in questo modo i moti apparenti a' reali, si raccolsero le leggi comuni e generali cui ubbidiscono tutti i corpi del nostro sistema nell'atto che si muovono. Queste leggi, le quali furono la prima volta conosciute da Keplero, sono: 1.° Le aree descritte dai raggi vettori dei pianeti

nel loro moto in riguardo al sole sono proporzionali ai tempi. 2.° Le orbite dei pianeti sono ellittiche, e in uno dei fuochi delle loro ellissi è riposto il sole come centro dei loro moti. 3.° I quadrati dei tempi delle rivoluzioni dei pianeti sono proporzionali ai cubi dei grandi assi delle loro orbite; o, come altrimenti esprimesi, le aree descritte in tempi eguali in orbite differenti sono proporzionali alle radici quadrate dei loro parametri. E siccome i movimenti delle comete in riguardo al sole, e quelli dei satelliti in riguardo ai loro pianeti principali offrono gli stessi fenomeni dei pianeti, e ubbidiscono alle stesse leggi di Keplero; così il sistema planetario fu da noi conosciuto sotto il suo vero punto di vista, e rigettate le ipotesi di Tolomeo e di Ticone, abbiamo letto e racchiuso in queste poche leggi i moti tutti dei pianeti, dei satelliti e delle comete, o sia di tutto il nostro sistema planetario. Giunti a questo termine andammo ricercando la causa di questi movimenti, e come si appartiene alla meccanica, a scomporre i moti curvilinei, e a ritrarre la natura della forza dagli effetti ch'essa produce. Così guidati dai principj della dinamica ci venne fatto di scoprire la causa generale dei movimenti celesti, e a sciogliere il moto dei pianeti, delle comete e dei satelliti in due forze, delle quali una è uniforme, e l'altra è continua. Di fatto col favor della dinamica potemmo ricavare dalla prima legge di Keplero, che la forza continua che sollecita i pianeti e le comete è diretta verso il centro del sole, e quella che anima i satelliti è diretta verso il centro dei loro pianeti principali. La dinamica del pari ci dettò alla vista della seconda legge di Keplero, che la forza centrale opera nei pianeti, nelle comete e nei satelliti in ragione inversa del quadrato delle distanze dal centro degli astri a quello del sole, o dal centro delle lune a quello dei loro pianeti. Valse in fine la meccanica a mostrarci dalla terza legge di Keplero, che questa forza centrale è unica e la stessa in tutti gli astri, e che dall'uno all'altro non varia se non in ragione delle loro distanze; dimodochè se tutti i pianeti o le comete fossero collocati a distanze eguali dal centro del sole, o pure tutti i satelliti di un pianeta ad egual distanza dal centro di questo pianeta, si vedrebbero sospinti egualmente e colla medesima velocità gli uni verso il sole, e gli altri verso il pianeta princi-

pale. D'onde ricavammo, giusta la dottrina del moto, che questa forza unica e generale penetra le singole molecole, è proporzionale alle masse dei corpi celesti, e la chiamammo, giusta la nostra maniera di vedere, per esprimerne gli effetti non già la natura, *attrazione*, e in riguardo ai pianeti e alle comete, *attrazione solare*. E perchè sulla terra ci ha la gravità; così ponemmo in confronto l'attrazione solare colla gravità, paragonando la forza che anima la luna, e quella che sospinge i gravi sulla superficie della terra. La dinamica ci avea insegnato che la forza gravità, la quale determina i gravi a scendere per la verticale, congiunta colla forza d'impulso, li obbliga a descrivere una curva, di modo che un corpo in virtù della gravità e di una data quantità di forza d'impulso può circolare, tolta la resistenza dell'aria, come fa la luna intorno alla terra. Ma sebbene questa considerazione ci abbia fatto argomentare che la forza centrale, che ritiene la luna, sia la forza gravità; pure coll'ajuto dell'esperienza ci venne dimostrato che la forza gravità va menomando d'energia giusta le distanze, e non cessa d'operare sulle altezze delle montagne, su quelle a cui elevansi i palloni aereostatici o più in là, e può estendere la sua azione dal centro della terra a quello della luna, come ci è dato di ricavare dai moti stessi di tale astro. Imperocchè circolando la luna cade verso la terra come cadono i gravi alla superficie, e altra differenza non ci è che nella lunghezza degli spazj; giacchè in tempi eguali gli spazj trascorsi dai gravi alla superficie della terra stanno a quelli che percorre la luna nello stesso rapporto dei quadrati delle distanze; di sorta che una pietra alla distanza della luna cadrebbe come la luna, e la luna alla superficie della terra cadrebbe come fa una pietra. Oltre di che così la forza che sollecita la luna, come la gravità sono proporzionali alle masse. E però se la gravità può da sè produrre il moto della luna nella sua orbita, se la sua azione si può estendere sino alla luna, se la forza della gravità operando sulla luna opererebbe come di fatti opera la forza in virtù di cui movesi la luna; è ben da conchiudersi dalla somiglianza degli effetti quella delle cause, e che la gravità sia la cagione dei movimenti lunari. E siccome la forza che anima e pianeti e comete e satelliti è della stessa indole della forza che sospinge la luna, si può ritrarre

e stabilire che la forza d'attrazione non sia che la gravità, e che la gravità terrestre non sia che attrazione, e che sia un principio generale della natura, *tutte le molecole della materia s'attirano mutuamente in ragion diretta delle masse, e reciprocamente al quadrato delle distanze.*

Ragionando sopra fatti ben discussi e comparati tra loro, ne abbiamo raccolto il principio generale dell'attrazione; e quindi posto come principio l'attrazione, se ne sono dedotti come conseguenti tutti i fenomeni. Imperocchè dato il principio della gravitazione, tutti i pianeti, e tra questi la terra, si debbono muovere intorno al sole come centro di moto, e i satelliti intorno ai loro pianeti principali. Si spiega per li principj della meccanica il loro movimento ellittico, la ragione per cui ora avvicinansi e ora allontanansi dal sole o dal centro di moto, e perchè la loro velocità sia difforme. E come non solo il moto ellittico si confà coll'attrazione, ma anche quello per una parabola e per un'iperbole; così si dimostra pure probabile che forse ci sieno comete che descrivono ellissi e parabole e iperboli. Al principio dell'attrazione unendosi in fine un movimento fuori del centro di gravità dei pianeti e dei satelliti, si venne dichiarando giusta i dettati della meccanica la rotazione dei corpi celesti. Dal principio adunque della gravitazione si ricavano i moti ellittici e di rotazione dei corpi celesti, le loro diverse distanze, e differenti celerità di cui son forniti nelle loro trajettorie.

Ma per rappresentare con esattezza i moti celesti non sono da riguardarsi i corpi che formano il nostro sistema planetario separatamente, ma da considerarsi legati tra loro per la mutua azione che esercitano gli uni sopra gli altri, o sia per la mutua loro attrazione. Allora non debbono calcolarsi i loro moti assoluti, ma i relativi, e quei che han luogo intorno ai loro centri di gravità; allora il moto ellittico dei corpi celesti non può aver luogo con esattezza, ma di una maniera che gli si avvicina, come di fatti si osserva; e questa deviazione è un conseguente ed una prova della mutua attrazione. Così il moto ellittico della luna, che avrebbe luogo in virtù della terrestre attrazione, è turbato dall'azione del sole, la quale essendo più o meno in ragione delle distanze, produce delle ineguaglianze nell'orbita lunare che sono

periodiche. Nasce parimente dalla forza perturbante del sole il movimento retrogrado della linea dei nodi, e il cangiamento d'inclinazione nell'orbita della luna. E perchè simili azioni reciproche avvengono in tutti i pianeti; perciò ne risultano le ineguaglianze dei pianeti, il moto dei loro nodi, dei loro perielj, e la variazione a cui son sottoposti nelle inclinazioni delle loro orbite all'ecclittica. Gli effetti di questa mutua azione sono più d'ogni altro notabili nei moti di Giove e di Saturno a cagione delle loro masse, che sono le più grandi nei corpi del nostro sistema; perciocchè attraendosi producono nelle loro orbite delle considerevoli ineguaglianze, i cui periodi sono assai lunghi, e di cui l'analisi ha già determinato le leggi. Finalmente per la mutua attrazione le comete ritardano il loro ritorno, e possono esse passare di sistema in sistema nello spazio, e cangiare il centro dei loro movimenti.

Se la gravitazione spiega tutti i moti celesti, essa pure ci fa ragione della forma sferica dei pianeti, ed unendosi colla forza centrifuga che nasce dal moto di loro rotazione, c'indica perchè i corpi celesti prendono una figura sferoidale schiacciata ai loro poli ed elevata al loro equatore. Nasce da questa figura, che l'attrazione del sole operando sull'equatore terrestre produce la precessione degli equinozj, e che l'attrazione della luna operando sull'equatore terrestre fa variare l'obbliquità dell'ecclittica, ed è l'origine del fenomeno della nutazione. Nasce pure dall'attrazione del sole e della terra sulla luna, ch'essa comparisce di librarsi in longitudine, e presenta sempre lo stesso emisfero a noi che abitiamo la terra. Finalmente è l'attrazione del sole e della luna sulle acque del mare che dà luogo alle maree e a tutti i fenomeni del flusso e riflusso del mare. Nè in altro modo si possono valutare, e di fatto si sono determinate le masse dei corpi celesti, che dall'azione che reciprocamente esercitano tra loro mutuamente attirandosi e perturbandosi.

Tutti questi fatti, ch'erano prima slegati e separati, sono ora tra loro legati e dipendenti gli uni dagli altri per mezzo del principio della gravitazione universale; e sia che dai fenomeni si salga al principio dell'attrazione, o che da questo principio si scenda alla spiegazione dei fenomeni, tutto è incatenato dal calcolo e dai principj

della meccanica; dimodochè il loro legame e la loro mutua dipendenza è la prova più certa ed evidente della verità del principio dell'attrazione. Ma questa riduzione di tutti i fenomeni a un solo principio si è fatta lentamente e dopo molti secoli di travaglio.

328. Sebbene l'astronomia fosse stata coltivata tra gli antichi popoli; pure per le memorie a noi pervenute sappiamo che i soli Pittagorici credeano che il sole fosse il centro dei corpi celesti, e la terra in movimento cogli altri pianeti intorno al sole, rotando intorno a sè stessa. Piacque ad essi ancora di considerare le comete, non altrimenti che da noi si riguardano, per corpi che fan parte del nostro sistema; e videro tra i pianeti e il sole e tra le loro distanze rispettive alcune misteriose proporzioni e una specie d'armonia da cui presero le mosse i belli ritrovamenti di Keplero. Questo sistema, sia che fosse stato tradizionario presso gli antichi popoli e particolarmente presso gli Egizj, sia che fosse stato immaginato da Pittagora, fu tenuto per vero da tutti i Pittagorici; ma com'era sfornito di prove, inviluppato sotto forme arcane e contrario alla testimonianza de' sensi, fu poi rigetatto, e nel secondo secolo dell'era cristiana surse quello di Tolomeo nella scuola d'Alessandria. Presso tutti i popoli e per 14 secoli si venerò il sistema di Tolomeo, il quale ancorchè fosse falso ed intricato, pure è l'opera di un grand'ingegno che abbraccia e spiega tutti i moti apparenti degli astri, e tutte le loro ineguaglianze per via di circoli diversi, e vuole e ricerca gran forza di mente e d'immaginazione per adattare quanto più si può i moti apparenti in senso contrario ai reali i quali han luogo in natura. Fu nei principj del secolo XVI che Niccolò Copernico impacciato dai molti e complicati circoli di Tolomeo, e avvertito dalle opinioni dei Pittagorici, trovò e lesse nelle osservazioni che già s'erano moltiplicate una disposizione più semplice dell'universo. S'accorse che mettendosi in movimento la terra, tutti i movimenti de' corpi celesti si spiegavano naturalmente e con chiarezza; la rivoluzione diurna del cielo non era che un'illusione la quale nascea dal moto di rotazione della terra; il ritorno delle stagioni proveniva dal paralellismo dell'asse della terra, e i moti alternativamente retrogradi e diretti de' pianeti non erano che una combinazione del moto della terra e dei pianeti in-

torno al sole. Ma questo sistema, il quale era fondato sulla semplicità della natura c sulla spontanea e facile spiegazione dei fenomeni, non potea nè era atto a colpire le teste volgari, e però ebbe pochissimi partigiani. Oltre di che il sistema di Tolomeo si venerava per la sua antichità, si ammirava per li suoi congegni, lusingava i sensi e l'orgoglio dell'uomo che si crede il centro dell'universo, e quel ch'è più, parea confermato dall'autorità de' libri sacri, dai quali allora si pretendea di conchiudere la quiete della terra. Indi avvenne che lo stesso Copernico adottò i cicli e gli epicicli di Tolomeo per ispiegare i movimenti della luna; che la più parte si ostinò sul sistema di Tolomeo; che si ebbe da' molti il moto della terra come una opinione contraria alla Bibbia, e che Ticone Brahe sul finire del secolo XVI produsse il suo sistema quasi per conciliare Tolomeo e Copernico, e i libri sacri colle osservazioni astronomiche, ammettendo il moto de' pianeti intorno al sole, e quello del sole con tutti i pianeti intorno alla terra che stavasi in riposo.

Cominciò il secolo XVII, e dal principio di questo secolo comincia la riforma dell'astronomia, e lo stabilimento del vero sistema del mondo. Galileo e Keplero, l'uno nato in Pisa e l'altro in Wiel di Wittemberg quasi nel medesimo tempo per accelerare colla loro contemporanea esistenza il progresso delle scienze, si possono riguardare come i benefattori dello spirito umano e i riformatori della fisica astronomia. Galileo col favore del telescopio, che il primo rivolse verso il cielo, scoperse i satelliti di Giove, lo schiacciamento ai poli e l'elevazione all'equatore di questo pianeta; vide le fasi di Venere, e da queste ed altre sue osservazioni ritrasse e confermò con prove il moto della terra, e propagandolo e dimostrandolo ne fu il martire. Keplero, tenendo per certo il moto della terra, coll'ajuto delle osservazioni di Ticone raccolse e pose le leggi fondamentali e generali cui ubbidiscono i pianeti e i satelliti, movendosi i primi intorno al sole, e i secondi intorno ai loro pianeti rispettivi come centri di moto. Galileo distrusse i principj dell'antica meccanica abolendo i moti violenti e naturali, e la distinzione dei moti rettilinei e circolari, dimostrando il principio del paralellogrammo delle forze e del moto composto. Keplero distrusse i movi-

menti circolari, che tutta l'antichità avea attribuito ai corpi celesti, e gli avanzi degli epicicli ch' erano stati inventati da Tolomeo e conservati in parte da Copernico, dimostrando colle osservazioni, che il moto dei corpi celesti si perfezionava in un'orbita ellittica. Galileo dalle oscillazioni del pendulo e dalle sue esperienze dichiarò la caduta verticale dei gravi, stabilì le leggi del moto uniformemente accelerato, tolse la distinzione di corpi leggieri e di corpi pesanti, e spiegando in qual modo la gravità congiunta con una forza uniforme potea far descrivere un cammino curvilineo ai corpi, aprì la via per applicare la meccanica e i principj del moto composto ai moti dei corpi celesti. Keplero per mezzo delle sezioni coniche e col favore dei logaritmi, di recente inventati da Neper, calcolò le *Tavole Rudolfine*, le quali formano un'epoca memorabile dell'astronomia, come quelle che furono le prime fondate sulle vere leggi dei moti planetarj. Da Galileo in somma e da Keplero fu dimostrata e rassodata la disposizione dei corpi del nostro sistema, com'era stata annunziata da Copernico, senza gli errori e i pregiudizj di Copernico. Per lo che da Galileo si recarono innanzi i principj della meccanica ch' erano da applicarsi ai moti dei corpi celesti, e da Keplero si posero le leggi dei moti di questi corpi; nè altro dopo loro restava a farsi, che cercare la causa di tali moti per mezzo della dinamica.

L' ingegno vasto e impaziente di Cartesio non aspettò le scoperte di Keplero e di Galileo, e senza prender cura dei loro travagli, si affrettò da sè e il primo a ridurre i movimenti dei corpi celesti alla meccanica. Creò i vortici, e nel centro di questi vortici mise la *materia* da lui chiamata *sottile*, che formava i corpi celesti. I vortici dei pianeti strascinavano per Cartesio i satelliti, e il vortice del sole strascinava i pianeti e i satelliti coi loro diversi vortici. Ma il corso delle comete, il quale ha luogo in ogni senso, bastò solo a distruggere i vortici cartesiani, come quelli ch'erano stati prodotti dalla sua immaginazione, ed altro di vero non restò di tutto l'edifizio di Cartesio, che la sola forza centrifuga, che conobbe ne' corpi circolanti, e con chiarezza e matematicamente la spiegò. Quegli che seguì il piano tracciato da Galileo, fu Huyghens che nacque in Haja nel 1629. Non solo egli scoprì un satellite intorno

a Saturno, e spiegò tutte le apparenze dell'anello che circonda questo pianeta; ma applicò il pendulo all'orologio, e stabilì i suoi belli teoremi sulla forza centrifuga. Che se avesse applicato le sue scoperte meccaniche e geometriche alle leggi di Keplero, forse avrebbe rapito a Newton la gloria d'aver inventato la teorica dei moti curvilinei, e scoperto la causa dei moti dei corpi celesti. Ma quest' onore era riservato a Newton che nacque in Woolstrop nel 1642, o sia in un tempo in cui tutto era preparato per far brillare il suo genio. Egli, come da noi si è esposto trattando della dinamica, dichiarò e scoprì la teorica dei moti curvilinei, e applicò i teoremi della forza centrifuga ai moti ellittici, e in virtù di questa teorica e dei suoi calcoli s'accorse e dimostrò che i moti dei pianeti derivavano da un solo principio e da una sola forza che opera in ragion diretta delle masse e in ragione inversa de' quadrati delle distanze. Egli seppe argomentare dalla luna che gira intorno alla terra, che la gravità sia la forza che anima e regola tutti i moti dei pianeti e dei satelliti, ed eziandio delle comete, che il primo incatenò al nostro sistema, e li mise, dirò così, in giro intorno al sole come centro di moto, non altrimenti che girano intorno al sole i pianeti. Egli in fine estese l'attrazione a tutte le molecole della materia, riguardandole per fornite della forza d'attrazione. Come giunse nelle sue meditazioni al principio generale, ritornò indietro per ispiegare i fenomeni del sistema del mondo. Tenne l' attrazione de' corpi celesti come la risultante delle attrazioni di tutte le loro molecole, e scoprì che la forza attraente d'un corpo, o d'uno strato sferico sopra un punto posto al di fuori, è la stessa, come se la massa fosse tutta raccolta nel suo centro; e che un punto posto al di dentro uno strato sferico, o pure terminato da due superficie ellittiche simili e similmente situate, è attirato egualmente da tutte le parti. Dimostrò il primo che il moto di rotazione della terra ha dovuto produrre lo schiacciamento dei suoi poli, e determinò la legge giusta cui debbano variare i gradi del meridiano terrestre, o pure la forza gravità nell'ipotesi che la terra fosse omogenea. Vide che l'azione del sole e della luna sulla sferoide terrestre deve imprimere un moto nel suo asse di rotazione, far retrogradare gli equinozj e sollevare le

acque del mare, e dare così origine al flusso e riflusso. Egli in fine ci rese certi che le ineguaglianze dei moti della luna provengono dalle azioni congiunte del sole e della terra sopra questo satellite. Ma tutte queste scoperte, eccetto il moto ellittico dei pianeti e delle comete, l'attrazione dei corpi sferici e l'intensità dell'attrazione sul sole e sulla superficie del pianeti accompagnati di satelliti, sono state abbozzate, non già ridotte a perfezione da Newton; e stabilito sodamente il principio dell'attrazione, lasciò ai suoi successori la cura di svilupparlo in tutti i suoi conseguenti, e di ritrovarlo di accordo in tutti i particolari fenomeni. Era di necessità che si perfezionasse il calcolo, strumento potentissimo dello spirito umano; che l'astronomia si arricchisse di nuove e più esatte osservazioni, e che la meccanica salisse all'altezza conveniente per isciogliersi con esattezza e perfettamente quei difficili problemi che offre la teorica del sistema del mondo, e di cui Newton o per vie indirette o per approssimazione, e alcuna volta senza rigor matematico, avea accennato la soluzione. Scorsero infatti quasi 50 anni dopo la morte di Newton senza che niente di più si aggiungesse al principio dell'attrazione; e dopo 50 anni, rovesciati i vortici di Cartesio, cadute le vecchie opinioni, perfezionata l'ottica, la meccanica e l'analisi, mosse la meccanica celeste rapidi i passi verso la perfezione. Fu nel 1737 e più d'ogni altro nel 1743 che Clairaut mandò alle stampe la teorica sulla figura della terra, che avean toccato Newton e Huyghens. E siccome il metodo del Clairaut era limitato alle ellissoidi di rivoluzione; così venne Alembert a trattarlo nel 1754 e 1756 in un modo più generale. L'articolo più importante era quello di mostrare il rapporto che passa tra la figura delle sferoidi e le loro attrazioni; e nel determinare questo rapporto si segnalarono Maclaurin prima, e poi Alembert, La Grange nel 1773, Le Gendre e La Place nel 1784, allorchè trattò in generale sulla figura dei pianeti. Ma sino a questo punto avean cercato i geometri la figura della terra nella supposizione che questa fosse stata inondata e coverta tutta dal mare, e La Place in fine venne investigandone la figura, ponendola, come al presente è, in gran parte e non al tutto ricoverta dalle acque, e ne incatenò la figura ellittica all'azione della gravità, alla misura dei gradi del me-

ridiano e ad alcune ineguaglianze della luna. Tutte queste discussioni sulla figura della terra erano legate col problema della precessione degli equinozj, e coll' altro fenomeno della nutazione già discoverto da Bradley. Avea, egli è vero, conosciuto e dichiarato Newton la causa della precessione, ma non ne avea saputo determinare la quantità e tutte le circostanze, allorchè Alembert diede in luce la sua opera sulla precessione degli equinozj, famosa per la copia delle ricerche e l'esattezza delle determinazioni. Dopo il geometra francese sopraggiunse Eulero, che prese a trattare con molta eleganza il medesimo argomento nelle Memorie dell'Accademia di Berlino e in quelle in particolare per l'anno 1749; di modo che sciolto già il gran problema, andò ricercandone La Place alcune circostanze, quali sono l'influsso della fluidità del mare e delle sue correnti, e delle altre dell'atmosfera su i movimenti dell' asse terrestre; l' influsso dello schiacciamento della terra sulla obbliquità dell'ecclittica, e sulla lunghezza dell'anno, ed altre particolarità che stabiliscono con quella precisione che maggiore si può ogni ineguaglianza che può aver luogo nei fenomeni della precessione e della nutazione. Ma tra i problemi che riguardano il sistema celeste e dipendono dall'attrazione, la teorica delle perturbazioni dei pianeti e dei satelliti è quella che si stima più ardua e difficile. Le prime ricerche sulle turbazioni dei moti planetarj ebbero luogo nella Memoria di Eulero su i movimenti di Giove e di Saturno, che fu coronata dall'Accademia delle Scienze nel 1748. Ciò non pertanto volendo quest' Accademia condurre a maggior perfezione la teorica, la propose pel premio prima nel 1750 e poi nel 1752, in cui fu coronata una seconda Memoria dell'Eulero, e quindi nel 1756, in cui parimente fu coronata una terza Memoria del medesimo Eulero sopra le ineguaglianze dei movimenti dei pianeti prodotte dalla loro mutua azione. Niente si aggiunse a questa teorica dopo Eulero sino al 1766, tempo in cui La Grange pubblicò negli atti dell'Accademia di Torino le sue belle ricerche intorno agli stessi oggetti già trattati dall'Eulero. Ma come le formule e le espressioni di questi due geometri mostravano delle differenze dalle quali si argomentava che avean trascurato alcune quantità; così La Place nel 1773 ricercò con più scrupolosità quell' espressioni, e diede

nell' Accademia delle Scienze le sue prime speculazioni sul sistema del mondo. Un' altra Memoria fu inviata a Parigi da La Grange nel 1774 sulle variazioni delle inclinazioni e dei nodi delle orbite dei pianeti, e coronata fu nel medesimo anno quella con che determinava l' equazione secolare della luna. Molte e tutte d' importanza furono le Memorie del La Grange e del La Place che coronate o registrate si leggono tra quelle delle Accademie delle Scienze di Parigi o di Berlino, che riguardano le perturbazioni del sistema planetario o pur delle comete. Nobili e grandi sono stati i travagli de' geometri sulla teorica della luna, su quella degli altri satelliti, sull' anello di Saturno, sul flusso e riflusso del mare, e sopra tanti altri articoli della meccanica celeste, che dopo Newton e in particolare dalla metà del passato secolo sino a noi sono stati discussi ed illustrati, di cui si può leggere tutta e ragionata la storia nel tomo quinto della *Meccanica celeste* del La Place. Racchiude questa storia le fatiche degl' ingegni più egregi e di quelli che recano più ampio onore al genere umano, e cominciano dal Newton e terminano al La Place. Per mezzo di un travaglio continuo e diligente, che si è durato in tutta l'Europa, siamo giunti in fine a spiegare colla gravitazione tutti i fenomeni conosciuti del sistema del mondo, e a condurre la teorica e le tavole astronomiche ad una esattezza cui non confidavano di poter pervenire. Basta la *Meccanica celeste* del La Place per dimostrare quanto sia la forza dell' ingegno umano e la superiorità dell' analisi; giacchè non si addita fenomeno sinora conosciuto che non si trovi di accordo colla osservazione, nè ci ha osservazione che non sia stata confermata dal calcolo che tutto viene e discende dall' attrazione. Potrà, egli è vero, la posterità altre cose aggiungere, e più di ogni altro rendere più semplice o più esatta la fisica celeste; ma dovrà confessare leggendo l' opera del La Place, che la nostra età ha determinato la causa e le leggi di ogni fenomeno nei moti dei corpi celesti.

FINE DEL TOMO II. DELLA FISICA GENERALE.

INDICE

DEL TOMO SECONDO

DELLA

FISICA GENERALE

34.

A B C D E F G H

38.

b c d g t

A A

42. Taurus Aries Pisces Aquarius Capricornus Sagittarius Scorpio Libra Virgo

P e E a m S

Q q

45. S

S. Rigaud

L. Vigano incise